ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Осязающие микроскопы

1991

Квант

1991

4

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Можно ли увидеть атомы? Увидеть — нет, но осязать — да. Как получено изображение отдельных атомов периодической структуры кристалла, вы узнаете из статьи «Осязающие микроскопы».*

2 *Картина бельгийского художника Р. Магритта (1898—1967) — еще одно «изображение периодической структуры».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Тренировка пространственного воображения: фигуры из половинок куба.*

ОСЯЗАЮЩИЕ МИКРОСКОПЫ

Кандидат физико-математических наук
А. ВОЛОДИН

Человека всегда привлекал микромир — мир предметов, которые нельзя увидеть глазом. Исследования природы микромира неоценимы. Они спасли человечество от великого множества страшных болезней, позволили инженерам создать чудеса микроэлектроники, ученым — понять природу большинства явлений, происходящих в нашем, видимом, мире.

Но чтобы понять устройство микромира, его надо прежде всего увидеть. Вот для того чтобы рассмотреть невидимый мир, датский исследователь А. Левенгук в 1674 году и изобрел оптический микроскоп, хорошо известный теперь каждому школьнику. В нем используется система преломляющих свет линз — для вывода из области фокуса увеличенного изображения объекта. Минули столетия; за это время оптический микроскоп настолько хорошо поработал в различных областях науки, что по праву стал одним из ее символов. Однако его возможности оказались ограниченными: он позволял рассматривать лишь мир микронных размеров. Ученых же влекли субмикронные объекты, измеряемые сотнями и десятками нанометров. Однако от первого микроскопа Левенгука, позволившего получать увеличение всего в 200 раз, современные оптические микроскопы ушли недалеко — их увеличение не превышает 1000. В чем же дело?

Запрет Аббе

Свыше 100 лет назад известный немецкий физик и оптик Э. Аббе установил, что для любого микроскопа, работающего с фокусируемым линзами светом или другим излучением, будут существовать принципиальные ограничения, и главное из них обуславливается дифракцией — способностью волны огибать объект; она «скрывает» детали меньшие, чем половина длины волны излучения. А поскольку длина волны видимого света составляет доли микрона, то в оптический микроскоп нельзя рассмотреть предмет субмикронных размеров.

Чтобы продвинуться в субмикронный мир, логично использовать излучение меньшей длины волны, например рентгеновское, или поток электронов (напомним, что электрон, как всякая элементарная частица, одновременно является и волной). Так в 30-х годах нашего века возникла электронная микроскопия.

У частиц излучения, независимо от его природы, есть универсальная характеристика — энергия. Чем больше энергия, тем короче длина волны. Прибор, построенный по принципу оптического микроскопа, но работающий с потоком электронов, преломляемым специальными магнитными линзами, называется электронным микроскопом. Электронные волны примерно в тысячу раз короче световых, поэтому увеличение лучших электронных микроскопов достигает одного миллиона. Но досталось оно непросто: электронный микроскоп в тысячи раз больше, сложнее и дороже оптического и имеет существенный недостаток — он разрушает исследуемый объект. Дело в том, что под действием электронов с энергиями в десятки электронвольт гибнет все живое, а в кристаллических материалах возникают дефекты — нарушения регулярного расположения атомов. И тем не менее электронный микроскоп позволил сделать большой шаг в изучении субмикронного мира.

А можно ли другим путем проникнуть в глубины микромира?

Как был преодолен запрет Аббе

Совсем недавно, в середине 80-х годов путь развития средств микроскопии круто изменился. Если раньше прогресс достигался в рамках запрета Аббе за счет уменьшения длин волн излучения, строящего изображение в микроскопе, то теперь этот запрет был просто обойден. Появились микроскопы нового поколения — сканирующие микрозондовые, которые позволяли исследовать поверхности с очень близкого расстояния. И если прежние микроскопы основывались на принципах «зрения», то приборы нового поколения действуют по принципу «осязания», причем они не только дают информацию о форме и расположении мельчайших деталей предмета, но и характеризуют их свойства. Так, магнитный зондовый микроскоп «ощущает» неоднородность намагниченности предмета, электрический — микрораспределение электрических полей, тепловой — различие температур и т. д. Итак, всем основным физическим параметрам теперь соответствует свой зондовый микроскоп. А зондовые микроскопы, основанные на туннелировании электронов и на действии сил межатомного взаимодействия, позволяют рассматривать даже отдельные атомы.

Но не будем забегать вперед и начнем с оптического зондового микроскопа.

Осязание светом

Представим себе непрозрачную коническую оболочку с крошечным отверстием в вершине, таким, что на его диаметре не уместится и половина длины волны света (рис. 1). Если через такую оболочку пропускать свет, он далеко не пройдет, так как световая волна не «пролезет» в отверстие таких размеров и отразится обратно. И все же по другую сторону отверстия свет можно обнаружить, но лишь в непосредственной близости — опять на расстоянии половины длины волны. Вот такой «провисающий» свет и используется в оптических микроскопах нового поколения. (Свойство «провисания» имеет квантовомеханическую природу, характерно для любой волны или частицы и называется туннелированием.)

Поместим вблизи отверстия, на расстоянии, меньшем его диаметра, изучаемый объект. На его поверхности появится световое пятно размером, примерно равным диаметру отверстия. Отраженный предметом свет можно уловить фотопреобразователем — прибором, превращающим слабые потоки света в электрический сигнал. Этот сигнал можно усилить и снова изобразить световой точкой на

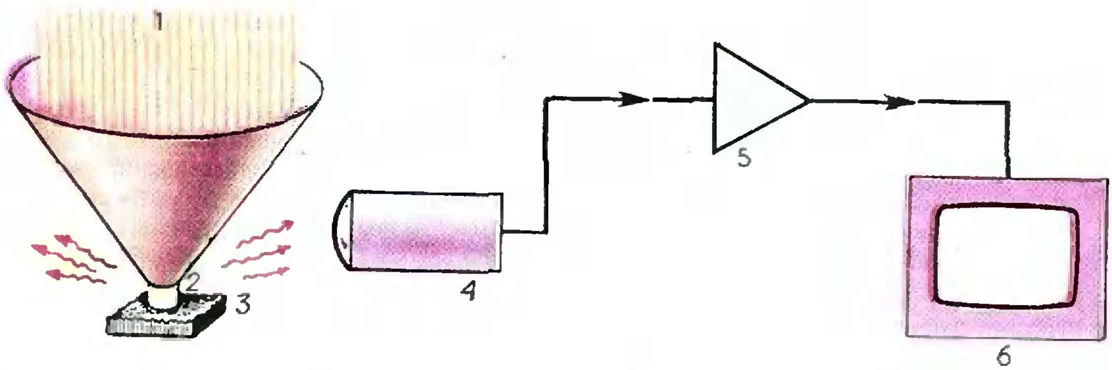


Рис. 1. Оптический сканирующий микроскоп ближнего поля. 1 — падающий свет. 2 — «провисающий» свет. 3 — изучаемый объект. 4 — фотопреобразователь. 5 — усилитель. 6 — монитор.

экране монитора. Яркость точки на экране будет соответствовать интенсивности улавливаемого света. Станем теперь водить острием-зондом вдоль поверхности предмета строка за строкой. Световое пятно, выходящее из зонда, пробежит всю исследуемую поверхность. Такая процедура называется сканированием поверхности. Если точками разной яркости отмечать на экране монитора пройденный зондом путь, на экране появится изображение поверхности. Разрешение, характеризующее полученное изображение, соответствует диаметру освещающего поверхность пятна, т. е. существенно меньше $\lambda/2$. (Напомним, что минимальный, еще наблюдаемый размер деталей предмета называется разрешением микроскопа.) Итак, запрет Аббе преодолен! Новый прибор, с помощью которого удалось это сделать, получил название оптического сканирующего микроскопа ближнего поля. Как это ни парадоксально, такой оптический микроскоп позволяет рассматривать детали, во много раз меньшие длины световой волны!

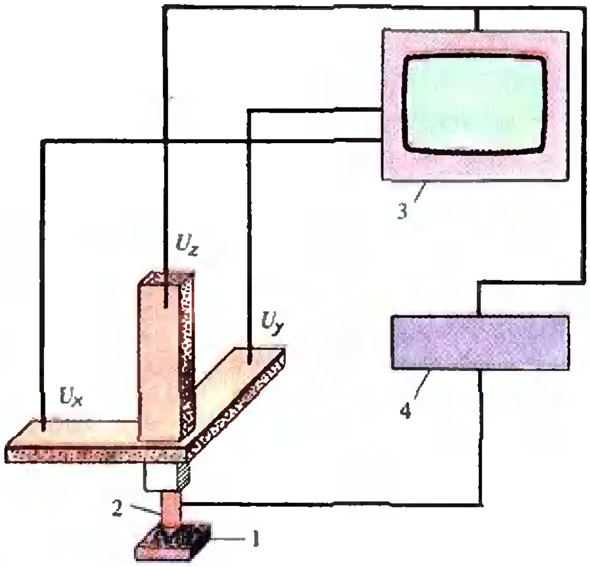


Рис. 3. Сканирующий зондовый микроскоп. 1 — изучаемый объект, 2 — зонд, 3 — дисплей, 4 — система обратной связи.

Пьезоэлектрические пальцы микроскопа

Но как можно сканировать поверхность предмета со столь высокой точностью? Для этого сконструированы прецизионные пьезоэлектрические манипуляторы, простейший из которых показан на рисунке 2. Он сделан из специальной керамики, слегка меняющей размеры при изменении приложенного электрического поля, для чего манипулятор помещают между пластинами конденсатора. Часто сами пластины наносятся на поверхность керамического манипулятора в виде электродов из тонкого слоя металла. Меняя напряжение на электродах на 0,1 В, можно удлинять такой стержень всего на 0,1 нм, т. е. на величину поперечника атома. (Слой металла на поверхности манипулятора достаточно тонок, чтобы, растягиваясь, не препятствовать этому перемещению.)

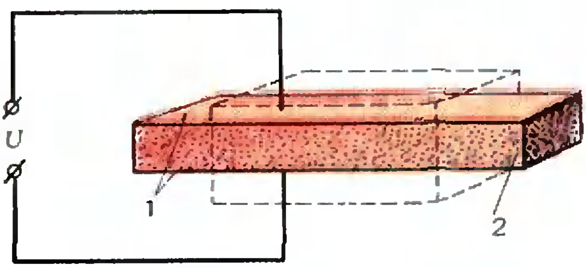


Рис. 2. Пьезоэлектрический манипулятор. 1 — электроды, 2 — пьезокерамика.

Простая конструкция из трех стержней-манипуляторов, соединенных в одной точке перпендикулярно друг другу, как показано на рисунке 3, может двигать зонд, помещенный в месте соединения, во всех пространственных направлениях. Три управляющих напряжения, U_x, U_y и U_z, зададут координаты смещения зонда x, y и z. Меняющиеся напряжения U_x, U_y перемещают зонд по поверхности исследуемого предмета, сканируя ее по параллельным строкам, отстоящим друг от друга на заданное расстояние (подобно лучу на экране телевизора). А напряжение U_z двигает зонд вверх и вниз; если U_z поддерживать неизменным, то при сканировании поверхности из-за неровностей удалялась бы или приближалась к зонду. Но это неудобно для регистрирующей системы — сигнал сильно меняется, да и при больших неровностях зонд может сталкиваться с ними. Чтобы избежать этого, в прибор вводят элемент самоорганизации — отрицательную обратную связь. Она заставляет зонд двигаться вверх и вниз в соответствии с рельефом поверхности.

Туннельный микроскоп осязает атомы

Подробнее действие системы обратной связи рассмотрим на примере сканирующего туннельного микроскопа; он первым появился в семействе зондовых микроскопов. За его изобретение Г. Биннинг и Г. Popep, сотрудники знаменитой компьютерной фирмы IBM в Цюрихе, были удостоены Нобелевской премии 1986 г. В нем зондом служит чрезвычайно острая металлическая игла. Если проводить аналогию с оптическим зондовым микроскопом, то роль отверстия зонда в туннельном микроскопе играет острие иглы, из которого вместо света «провисают» квантовомеханические волны электронов, содержащихся в металле острия (рис. 4). Длина таких электронных волн примерно в тысячу раз меньше световой, и, соответственно, «освещать» они могут площадку в тысячу раз меньшего размера, чем оптический зонд. Когда такая электронная волна касается исследуемой проводящей поверхности (а происходит это при расстояниях между зондом и поверхностью около 1 нм), электрон с острия может перепрыгнуть на поверхность, иначе говоря, «туннелировать». Туннелирование означает появление электрического тока в цепи зонд — поверхность, правда, тока очень слабого — в миллиардные доли ампера, но усиление его средствами современной электроники проблемы не представляет. Важно, что он чрезвычайно сильно зависит от расстояния между острием и поверхностью. Так, уменьшение расстояния на пару ангстрем, т. е. примерно на размер атома, увеличивает туннельный ток в тысячу раз. Функция, отражающая эту зависимость,— экспоненциальная (показательная функция с основанием $e = 2{,}718\ldots$).

Вернемся теперь к системе обратной связи, которая обеспечивает качественную работу всякого зондового микроскопа. Она представляет собой сложную и чувствительную электронную схему, улавливающую изменение туннельного тока и изменяющего напряжение U_z, приложенное к вертикальному манипулятору. Пьезоэлектрический манипулятор перемещает зонд так, чтобы туннельный ток оставался постоянным. Это возможно лишь при сохранении неизменным расстояния между зондом и поверхностью. Таким образом, обратная связь не дает зонду ни отойти от поверхности, ни столкнуться с ней. Из-за чрезвычайной чувствительности туннельного тока к расстоянию до поверхности точность действия обратной связи очень высока — 0,1—0,01 Å. В результате острие движется по траектории, старательно повторяющей рельеф сканируемой зондом поверхности. И поскольку напряжение U_z пропорционально высоте места поверхности, над которым в данный момент находится острие, оно служит удобной мерой рельефа. Информация о рельефе поверхности записывается в память ЭВМ и после обработки, состоящей в фильтрации, т. е. устранении шумовых и паразитных сигналов, выводится на дисплей в виде «топографической карты» поверхности (рис. 5). Обычно карта полуто-

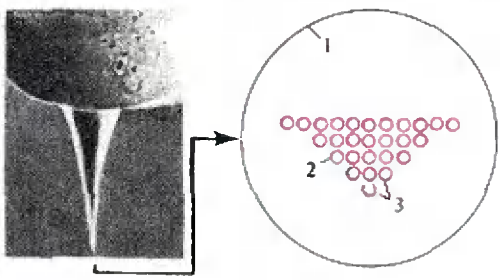


Рис. 4. Зонд туннельного сканирующего микроскопа. 1 — «увеличенное» острие, 2 — атомы, 3 — облака электронов, слева — острие (электронномикроскопическая фотография).

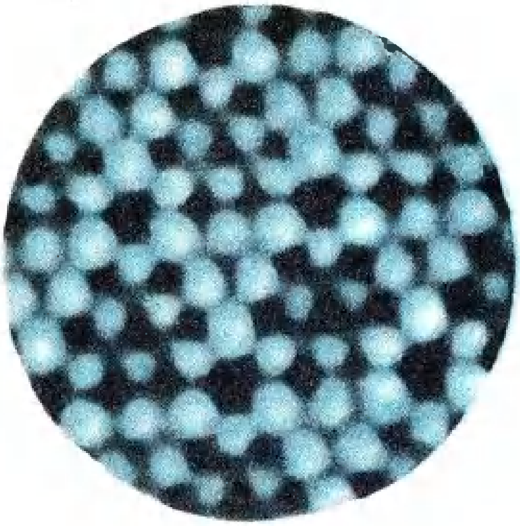


Рис. 5. «Топографическая карта» поверхности кристалла кремния.

новая, т. е. на ней высота рельефа обозначается интенсивностью раскраски. Отчетливо видны положения отдельных атомов кремния в периодической кристаллической структуре (максимальный перепад высот 2 Å). Пример туннельно-микроскопического изображения рельефа поверхности кристалла кремния показан также на обложке журнала.

В настоящее время с помощью сканирующих туннельных микроскопов получены детальные изображения поверхностей многих кристаллических и полимерных материалов с атомным разрешением. Сканирующий туннельный микроскоп имеет беспрецедентное увеличение — 100 миллионов!

Исследователи уже успели привыкнуть к тому, что пьезоэлектрические манипуляторы можно перемещать с точностью, соответствующей атомным размерам. Они научились даже использовать острие туннельного микроскопа как инструмент для работы в нанометровом микромире — острием толщиной в один атом можно точно попасть в выбранное место молекулы и разрезать ее на части. А можно «подцепить» какой-нибудь атом и перенести его в нужное место. В лаборатории фирмы IBM ученым удалось сделать надписи, выложенные из цепочек атомов. Надпись, символизирующая эмблему фирмы, была составлена из отдельных атомов ксенона на поверхности кристалла никеля. Она собрана острием туннельного микроскопа из хаотически разбросанных по поверхности атомов ксенона, прилипших к никелю. Чтобы из-за теплового движения атомы не разбегались по поверхности, опыт проводился при очень низкой температуре —269 °С. Это, конечно, рекламное достижение, однако оно показывает, насколько развилась нанотехнология — умение строить в микромире искусственные структуры, которые в будущем составят основу электронных устройств фантастически малых размеров.

Микроскоп ощущает отталкивание атомов

И все же при всей своей привлекательности сканирующий туннельный микроскоп имеет существенный недостаток — для него пригодны лишь *электропроводящие объекты*. Большинство же материалов покрыто изолирующим слоем окислов. Заманчивые для изучения биологические объекты тоже часто не проводят ток. Может ли сканирующий туннельный микроскоп осязать «непроводящие» атомы? Оказалось, может. Достаточно между его острием и поверхностью объекта-изолятора поместить мельчайшую крупинку алмаза, прикрепленную к тонкой металлической полоске, как показано на рисунке 6.

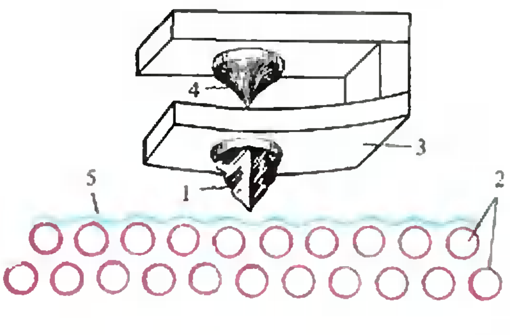


Рис. 6. Зонд микроскопа на атомных силах. 1 — крупинка алмаза, 2 — атомы, 3 — пружинная пластинка, 4 — острие, 5 — облака электронов.

Острый край крупинки будет отталкиваться электронными облаками атомов поверхности. Конечно, потребуется так приблизить крупинку, чтобы электронные облака ее края и поверхности перекрывались. Полоска металла действует как пружинка, прижимающая крупинку к поверхности.

Станем теперь сканировать этим «бутербродом» поверхность. Двигаясь вверх-вниз, крупинка будет отслеживать неровности рельефа. Ее движение будет регистрироваться по изменению тока туннелирования, текущего с острия на металлическую полоску. И в такой прибор, называемый микроскопом на атомных силах, встраивают систему обратной связи, работающую примерно так же, как в сканирующем туннельном микроскопе. Перемещая весь зонд-«бутерброд» по вертикал , эта система поддерживает отклонение полоски с крупинкой (а значит, и отталкивающую атомную силу) постоянным. Микроскоп на атомных силах тоже имеет сверхвысокое атомное разрешение. В качестве примера на рисунке 7 приведена полученная с его помощью карта слоя полимеризованных молекул сложного органического вещества. Она раскрашена компьютером наподобие географической: цветовая шкала в нижней части рисунка показывает высоту рельефа.

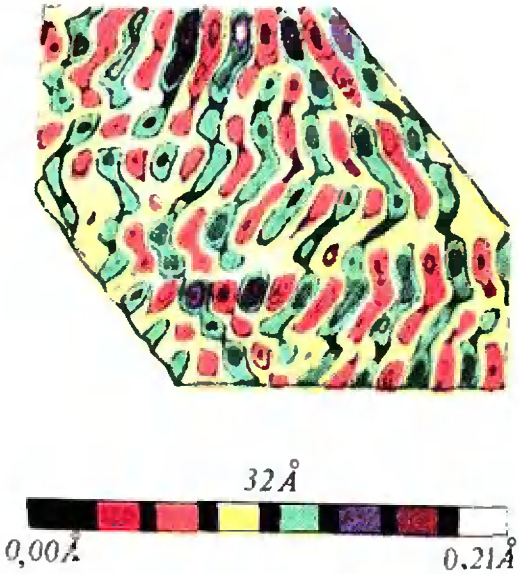


Рис. 7. Карта слоя полимеризованных молекул, полученная с помощью атомно-силового микроскопа.

Биты информации под микроскопом

Вы, конечно, знаете, что такое бит информации. Когда информация записывается с высокой плотностью на магнитном диске ЭВМ, в поверхностном слое диска образуются намагниченные и ненамагниченные участки микронных или субмикронных размеров. Однако в какой микроскоп вы бы ни смотрели на диск, ничего бы там не увидели. Но вот в семействе зондовых микроскопов появился прибор, «осязающий» эти магнитные участки диска,— речь идет о микроскопе на магнитных силах. Он совсем просто получается из атомно-силового микроскопа, достаточно алмазную крупинку заменить на крошку магнитного материала железа или никеля. Магнитная крошка будет испытывать действие полей намагниченных участков, и в результате сканирования поверхности диска мы получим карту распределения магнитных сил — биты информации станут видимыми.

* * *

Итак, мы познакомились с некоторыми представителями обширного и могучего семейства сканирующих зондовых микроскопов. Несмотря на свою молодость, они уже многое умеют. Несомненно, по мере «взросления» эти микроскопы не только распахнут перед нами микромир атомов и молекул, но и позволят работать в нем, вносить нужные изменения, строить новые объекты.

ЗАГАДКА «АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ»

Доктор физико-математических наук
В. БОЛТЯНСКИЙ

Необычная ассоциация

В одном городе учредили ассоциацию коллекционеров, объединившую филателистов, нумизматов, собирателей игольных ушков и т. п. Решили, что правление ассоциации должно состоять из нечетного числа персон (это удобно при голосовании). Решили также, что правление разместится в одном здании, причем у каждой персоны (т. е. члена правления) будет свой телефонный аппарат внутренней связи. А чтобы не усложнять устройство внутренней связи, решили коммутатор не устанавливать, а прямо соединить каждую персону телефонными линиями с какими-либо тремя персонами.

— Ну, что же,— сказал один из учредителей ассоциации,— я думаю, такая организация работы правления достаточно удобна.

— Особенно мне нравится,— сказал второй (известный Собиратель математических диковинок),— что работу правления можно описать абстрактной аксиоматической схемой. Судите сами, у нас есть три первоначальных понятия: «персона», «линия», «соединяет», и мы хотим, чтобы выполнялись следующие *аксиомы:*

1) число персон нечетно;

2) каждая линия соединяет ровно две персоны;

3) каждая персона соединена линиями ровно с тремя другими персонами.

— Ну, а какой смысл в этой аксиоматике? Можно ли из нее вывести какие-либо теоремы, чтобы получилась «теория», отражающая работу нашего правления?

— Отчего же, извольте! Во-первых, аксиома 1 показывает, что хотя бы одна персона существует (ведь нуль — четное число!). Далее, аксиома 3 убеждает нас, что поскольку есть хотя бы одна персона, то найдутся еще три другие, так что общее число персон не меньше четырех. Наконец, еще раз применяя аксиому 1, находим, что *общее число персон не меньше пяти.* Такова первая теорема этой «теории».

— Что же, это утверждение, в самом деле, можно считать теоремой, поскольку вы его доказали, т. е. логически вывели из аксиом.

— Или вот еще пример очень простой теоремы: *среди любых пяти персон обязательно найдутся две, которые не соединены линией.*

— Ну, это понятно: иначе к каждому из этих пяти было бы подведено не менее четырех линий.

— Совершенно верно! Кстати, вы сказали: линия «подведена» к персоне. Этому можно дать четкое определение в рамках нашей аксиоматики. Именно, если A — некоторая персона и l — линия, соединяющая ее с некоторой другой персоной, то пару $(A; l)$ будем называть *вводом.*

— И теперь можно сказать, что каждая персона A участвует ровно в трех вводах $(A; l_1)$, $(A; l_2)$, $(A; l_3)$. Это и будет означать, что к A «подведены» три линии l_1, l_2, l_3 (аксиома 3).

— Прекрасно! — заулыбался Собиратель математических диковинок.

— Продолжая ваше рассуждение, можно сформулировать следующую теорему: *число всех вводов нечетно.* Ведь персон — нечетное число (аксио-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 3 за 1976 год.

ма 1), и каждая участвует ровно в трех вводах.

Внезапно лицо Собирателя омрачилось. Голос его стал унылым.

— К сожалению, можно доказать также и то, что число вводов четно. Ведь каждая линия l (соединяющая, скажем, персоны A и B) участвует в двух вводах: (A; l) и (B; l), так что число всех вводов вдвое больше числа всех линий.

— Да, но это же противоречит предыдущей теореме?

— В том-то и беда. Выходит, наша аксиоматика *противоречива*, раз из нее можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Так что лопнула наша теория: систему связи, описываемую аксиомами 1, 2 и 3, просто невозможно осуществить.

Другая аксиоматика

— Что же нам делать? Пойти на то, чтобы число членов правления было четным? Но ведь нам так хотелось этого избежать.

— Почему же, есть и другой выход,— ответил Собиратель математических диковинок.— Оставим аксиомы 1 и 2 прежними, а третью аксиому заменим следующей:

3′) каждая персона соединена линиями ровно с четырьмя другими персонами.

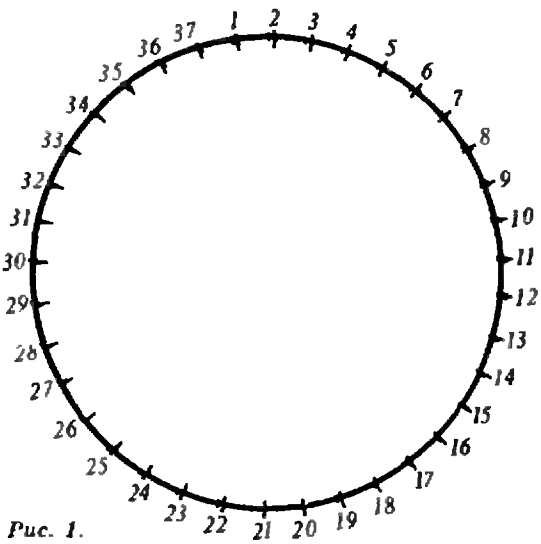


Рис. 1.

Правда, придется проложить большее число линий, но зато аксиоматика станет непротиворечивой, да и теоремы сохранятся. По-прежнему, общее число персон не менее пяти; из любых шести персон найдутся две, которые не соединены линией; общее число вводов будет четным (и здесь уже нет никакого противоречия). Можно будет доказать и дальнейшие теоремы.

— Позвольте, но почему вы так уверены в отсутствии противоречий? Да, с числом вводов теперь все в порядке; но, возможно, доказывая все новые и новые теоремы, мы все же натолкнемся когда-нибудь на противоречие. Ведь не будете же вы утверждать, что заранее знаете *все* теоремы, которые можно доказать в теории, основанной на этой новой аксиоматике! А если так, то кто же может гарантировать отсутствие противоречий?

— О, здесь я вполне уверен! Сейчас я объясню вам причину такой уверенности. Вы ведь, надеюсь, не сомневаетесь в «правильности» арифметики?

— Нисколько не сомневаюсь; но арифметика-то тут причем?

— А вот причем. Я сейчас из «материала» арифметики построю, как говорят математики, *модель* для рассматриваемой аксиоматики. Кстати, сколько персон (ориентировочно) будет в правлении?

— Думаю, не меньше 30 человек.

— Прекрасно! Условимся считать «персонами» числа 1, 2, ..., 36, 37.

Удобно расположить их на окружности (рис. 1), чтобы за 37 «следующим» было число 1. Теперь «линиями» будем называть пары чисел, причем лишь такие пары, в которых числа стоят либо рядом, либо через одно на этой окружности. Например, «линиями» будут пары (1; 3), (4; 5), (37; 2); а вот пара (3; 6) «линией» не будет — числа стоят слишком далеко друг от друга.

— Кажется, я понял, что вы хотите. В этой, как вы сказали, модели, есть 37 «персон», т. е. нечетное число (аксиома 1). Каждая линия

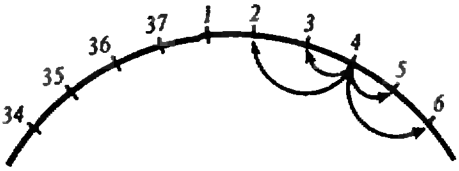


Рис. 2.

соединяет ровно две персоны (аксиома 2), так как пара состоит из двух чисел. Кроме того, ясно, что к каждой «персоне» проведены ровно четыре линии (аксиома 3); это можно пояснить схемой, показанной на рисунке 2. Значит, в этой модели выполняются все аксиомы 1, 2, 3. Однако почему же это гарантирует непротиворечивость рассматриваемой аксиоматики?

— Так ведь модель-то эта «сделана» из чисел! Если бы из аксиом 1, 2 и 3 можно было вывести две противоречащие друг другу теоремы, то это противоречие обнаружилось бы и в этой модели. Выходит, что, рассуждая о числах, мы могли бы получить противоречие. Но, кажется, в непогрешимости арифметики вы не сомневаетесь?

— Ну, что же, я понял ваши доводы. И, позвольте, повторю их, так сказать, в общем виде. Вы рассматриваете две теории: P и Q. Теория P (в качестве нее была взята арифметика) не вызывает сомнений, рассматривается, как незыблемая и непогрешимая. Теория же Q — это новая теория, определяемая списком аксиом. Нам нужно получить гарантии непротиворечивости теории Q. Для этой цели применяется такой прием: из понятий теории P, как из «строительного материала», пытаются построить модель теории Q, т. е. такую схему, в которой все аксиомы теории Q выполняются; если это удается сделать, то тем самым непротиворечивость теории Q доказана.

Странная геометрия

— Мы несколько отошли от обсуждения вопросов, связанных с ассоциацией коллекционеров. Но поскольку я коллекционирую математические диковинки, я хочу сейчас предложить вам одну из них: довольно необычную модель геометрии.

— С удовольствием «взгляну» на эту диковинку.

— Представьте, что из плоскости удалена (или, как говорят математики, *выколота*) одна точка O (она, конечно, есть, но мы как бы не считаем ее «точкой»). Все же остальные точки (отличные от O) по-прежнему будем считать точками.

— В этом весь фокус?

— Минуточку терпения. Каждую окружность, проходящую через эту выколотую точку O, будем теперь называть «прямой» (сюда же отнесем и «окружности бесконечного радиуса», т. е. прямые, проходящие через O). На рисунке 3 изображено несколько «прямых».

— Это уже необычно. Берем заведомо искривленные линии и объявляем их «прямыми». Только зачем это?

— Давайте, для примера, проведем «прямую» через две точки A и B. Как это сделать?

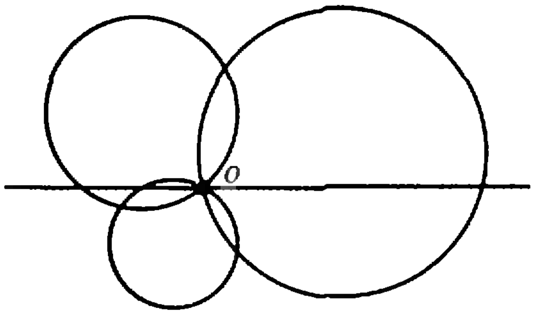


Рис. 3.

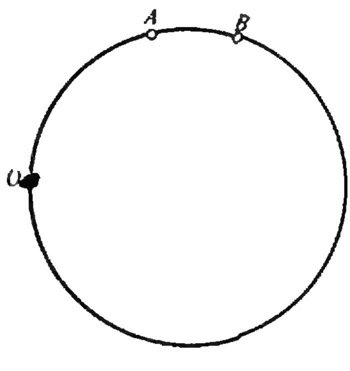


Рис. 4.

— Вы хотите, чтобы «прямая» проходила через точки A и B. Кроме того, раз это «прямая», то она должна проходить и через точку O. Значит, надо провести окружность через три точки A, B, O (рис. 4). Это сможет сделать каждый школьник.

— Но такая «прямая» *существует* и притом *только одна*. Вы согласны?

— Да, поскольку три точки однозначно определяют окружность.

— Значит, в этой модели выполняется аксиома: *через две разные точки проходит прямая и притом только одна.*

— Кажется, меня начинает интересовать ваша диковинка.

— А теперь посмотрите на рисунок 5. На нем изображен треугольник ABC. Чтобы найти сумму углов этого треугольника, можно взять сумму отмеченных углов при точке O. А углы эти составляют вместе развернутый угол. Значит, в этой модели *сумма углов треугольника равна $2d$.*

— Потрясающе!

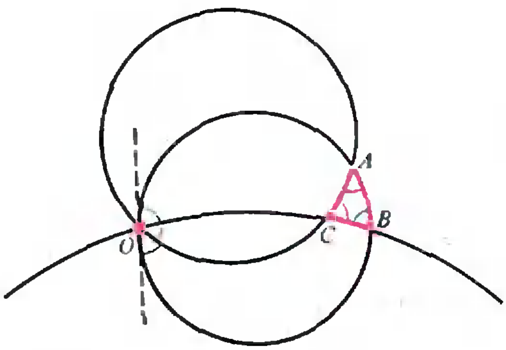


Рис. 5.

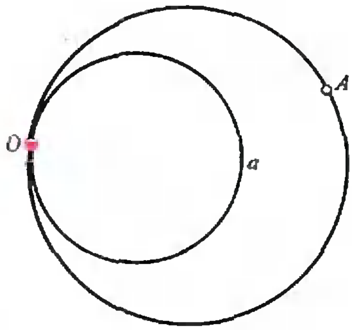


Рис. 6.

— Заметьте еще, что в этой модели через точку, лежащую вне данной «прямой», проходит единственная «прямая», не пересекающая данную. Это будет окружность, касающаяся данной «прямой» в точке O (рис. 6): ведь точка O считается выколотой, так что две изображенные «прямые» не имеют общих точек.

— Выходит, что в этой модели выполняется и «аксиома параллельных»?

— Совершенно верно. И вообще, в этой модели выполняются все аксиомы (а значит, и теоремы) той геометрии, которая изучается в школе (ее называют *геометрией Евклида*, по имени ученого, который свыше 2000 лет назад дал систематическое ее изложение). Правда, я описал модель не до конца. Не было сказано, как измерять длины, какие треугольники следует считать равнобедренными, и т. д. Кроме того, надо добавить еще точку ∞ *) для полноты этой модели. Но сущность дела ясна: мы построили модель обычной (евклидовой) геометрии.

— Что же получается? Исходная теория P — это геометрия, и из «материала» этой теории построена модель той же самой теории?

— Совершенно справедливо! Привел же эту модель я лишь для того, чтобы показать, что не так уж странно считать кривые линии «прямыми» в некоторой модели **).

Трагедия Лобачевского

— А теперь — еще один экспонат из коллекции математических диковинок. Речь идет о геометрии, открытой великим русским математиком Н. И. Лобачевским.

— Насколько я знаю, он построил геометрию, в которой через точку можно провести более одной параллельной к данной прямой (рис. 7).

— Верно. И хотя все рассуждения Лобачевского были логически безу-

*) ∞ — это «бесконечно удаленная точка».

**) Читателю мы советуем понять, «что». в этой модели «к чему»; для этого полезно воспользоваться инверсией.

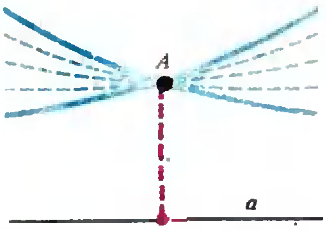


Рис. 7.

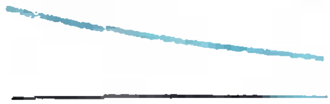


Рис. 8.

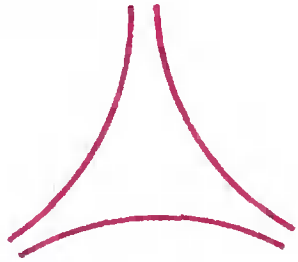


Рис. 9.

речны, он при жизни так и не добился признания своих идей. Слишком уж необычны были выводы.

— Например?

— Ну, например, параллельные прямые сближаются (рис. 8). Можно даже построить «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны (рис. 9). И хотя на рисунке 9 изображены кривые линии, в геометрии Лобачевского существуют прямые, которые именно так расположены. Далее, сумма углов треугольника всегда меньше $2d$ и т. д. и т. п.

— Но ведь это же все не так на самом деле!!!

— Вот, вот! То же говорили и современники Лобачевского. А он понимал, что дело-то здесь в том, противоречива или же нет та геометрия, которая получается из положенных в ее основу аксиом; кроме того, разговоры: «в действительности все не так»,— основаны лишь на том, что нашим наблюдениям доступна небольшая часть пространства, где различия между евклидовой геометрией и его геометрией не заметны (лежат за пределами точности измерений). И, кстати, современная физика все более подтверждает это.

— Удивительно. Но вы, насколько я понял, хотели говорить о чисто математическом подтверждении правильности геометрии Лобачевского?

— Точнее, о ее *непротиворечивости*.

— Ах, понимаю! Видимо, вы хотите сказать, что из «материала» какой-то теории P, в правильности которой мы не сомневаемся, можно построить *модель геометрии Лобачевского*?

— Совершенно верно! И этой теорией P является евклидова геометрия!

— И что же, Лобачевский знал об этом?

— Нет, но он построил другую замечательную модель. Ему удалось из «материала» своей геометрии построить модель евклидовой геометрии.

— Значит, если бы все были уверены в непогрешимости геометрии Лобачевского и сомневались в правильности геометрии Евклида, то этой моделью можно было бы убедить всех, что геометрия Евклида тоже непротиворечива! А ведь желательно, чтобы все было наоборот.

Запоздалая справедливость

— Вы теперь видите, что Лобачевский хорошо понимал, что такое модель, и как можно было бы доказать непротиворечивость его геометрии. Надо было, приняв евклидову геометрию за исходную теорию P, построить из ее «материала» модель теории Q — геометрии Лобачевского. Но такие модели были найдены лишь после смерти ученого.

— Кто же сделал это?

— Бельтрами, Кэли, Клейн, Пуанкаре и другие ученые *).

— И что же, эти модели очень сложны?

— Нет. Вот как, например, строится модель, найденная выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре**). В этой модели рассматриваются

*) См., например, статью С. Гиндикина «Феликс Клейн» («Квант», 1975, № 12).

**) В статье С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре» («Квант», 1976, № 3) рассказывается о модели, в которой «точками» служат точки верхней полуплоскости, а «прямыми» — вертикальные лучи и ортогональные к граничной прямой верхние полуокружности. Подумайте, почему это одинаковые модели (вспомните об инверсии).

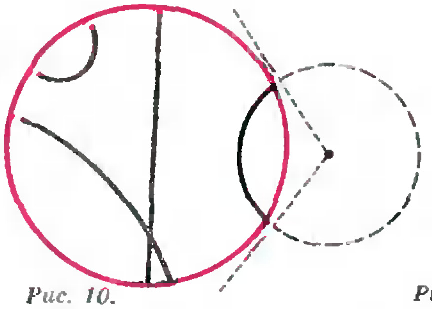


Рис. 10.

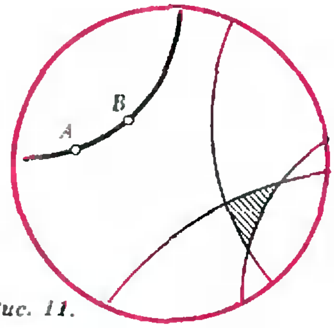


Рис. 11.

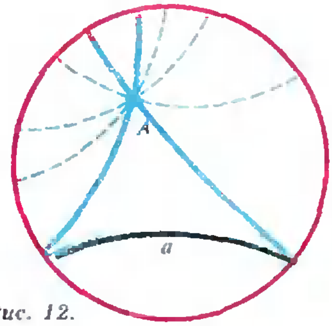


Рис. 12.

только точки, лежащие внутри некоторого круга K. «Прямые» же определяются так: берется окружность (или прямая), пересекающая под прямым углом окружность круга K, и часть этой окружности, лежащая внутри K, объявляется «прямой». На рисунке 10 показано несколько «прямых» в этой модели.

— Эта модель немного напоминает модель геометрии Евклида, о которой мы говорили раньше.

— И, обратите внимание, в этой модели тоже можно доказать, что через две точки проходит единственная «прямая». Можно в этой модели рассматривать треугольники (рис. 11). А рисунок 12 показывает, что через точку вне «прямой» a можно провести

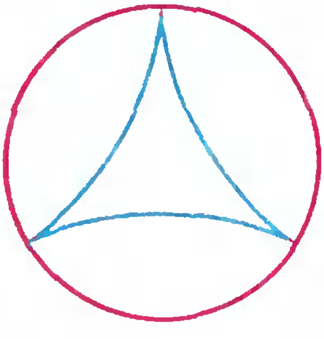


Рис. 13.

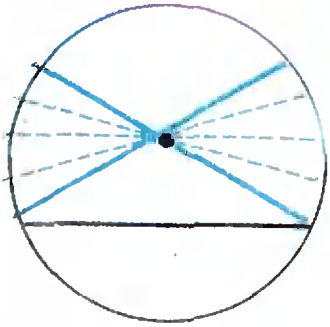


Рис. 14.

бесконечно много «прямых», не пересекающихся с «прямой» a. Две из них (те, которые касаются прямой a на границе круга K, т. е. как бы в «бесконечно удаленных точках») параллельны прямой a. Ну, а на рисунке 13 изображен «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны. Короче, это есть модель именно геометрии Лобачевского.

— А другие ученые, имена которых вы назвали, построили такую же модель?

— О нет! Сейчас известно много разных моделей геометрии Лобачевского. Например, в работах Клейна и Кэли построена модель, в которой тоже рассматриваются только точки, лежащие внутри некоторого круга K, но «прямыми» у них считаются *хорды* этого круга (без концов). На этой модели еще проще увидеть, что через точку вне «прямой» a проходит бесконечно много «прямых», не пересекающихся с a (рис. 14). Однако углы, например, в этой модели измеряются сложнее, чем в модели Пуанкаре.

— Да, ваши «математические диковинки» очень интересны. Теперь понятно значение открытия Н. И. Лобачевского, который не только построил совершенно необычную геометрию, но и положил начало для нахождения все новых и новых «геометрий». Я слышал, что математика сейчас рассматривает много разных пространств и геометрий, причем они применяются в физике и других областях. Наверно, и в вашей коллекции есть немало удивительных пространств, геометрий, математических «миров»?

— Есть, конечно. Но об этом поговорим как-нибудь в другой раз.

ИСТОРИЯ ОДНОГО НЕРАВЕНСТВА

Л. КУРЛЯНДЧИК, А. ФАЙБУСОВИЧ

Мы расскажем о неравенстве

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}\,^{*)},$$

исследовать которое впервые предложил американский математик Шапиро на страницах журнала «The American Mathematical Monthly» в 1954 году. Эта задача привлекла внимание многих математиков во всем мире. Весьма существенный вклад в ее решение внес советский школьник (читатель «Кванта»!) Володя Дринфельд, ставший впоследствии лауреатом Филдсовской премии **).

В 1958 году профессор Морделл из Кембриджа доказал это неравенство для $n\leqslant 6$. Столкнувшись с принципиальными трудностями в случае $n=7$, он высказал гипотезу, что неравенство для $n=7$ неверно. Любопытно, что если бы ему удалось доказать свою гипотезу, т. е. найти семь чисел $x_1, x_2, \ldots, x_7$, для которых такая сумма была бы меньше $7/2$, то отсюда сразу следовало бы, что неравенство неверно для всех $n\geqslant 7$. Докажем это. Сначала введем обозначение

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2},$$

которое сэкономит нам много места. Затем заметим, что

$$f_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

т. е. левая часть неравенства не изменяется, если числа, входящие в его левую часть, переставить по циклу. Поэтому это неравенство и другие, обладающие таким свойством, называются *циклическими*.

Проверьте, что

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)+1.$$

Отсюда следует, что если

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)<\frac{1}{2}n,$$

то

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2)<\frac{1}{2}(n+2).$$

Теперь проверьте, что

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n)-f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)-\frac{1}{2}=\frac{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}{2x_i(x_i+x_{i+1})},$$

при этом следует считать, что $x_{n+1}=x_1$, а $x_{n+2}=x_2$. Отсюда вытекает, что если

$$(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\leqslant 0,$$

то

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n)<\frac{1}{2}(n+1)$$

при $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)<\frac{1}{2}n$.

Но в случае нечетного n обязательно найдется такое i, для которого $(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\leqslant 0$, т. к. если бы для всех i выполнялось неравенство $(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})>0$, то, перемножив эти неравенства, мы получили бы $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2\ldots(x_n-x_1)^2<0$. Поскольку 7 — число нечетное, то неравенство было бы неверным для $n=8$ и всех четных n, а предыдущее рассуждение обеспечивало бы этот результат для нечетных n.

Однако в 1961 году Дьекович, математик из Белграда, опроверг предпо-

*) Все переменные в этой статье неотрицательны, а знаменатели положительны.

**) О премии Филдса и ее лауреатах «Квант» рассказывал в № 6 за 1990 год.

ложение Морделла, доказав неравенство для $n=8$. А в 1967 году бразильский математик Новосад опубликовал доказательство для $n=10$. В 1974 году советские математики В. И. Левин и Е. К. Годунова доказали неравенство для $n=12$.

В те годы никто из математиков не пытался доказать неравенство в общем виде. Уже в 1956 году английский математик Лайтхилл установил, что, вообще говоря, неравенство неверно. Ему удалось построить набор из двадцати чисел $x_1, \ldots, x_{20}$ такой, что $f_{20}(x_1, \ldots, x_{20})<10$. А через некоторое время ему и независимо от него шотландскому математику Цулауфу удалось найти соответствующие примеры для $n=14$. Вот один из них: 50, 5, 48, 3, 48, 1, 50, 0, 52, 1, 54, 4, 53, 6.

В случае нечетного n все обстоит значительно сложнее. В 1958 году Ранкин, математик из Глазго, доказал, что неравенство неверно для достаточно больших нечетных n.

В 1959 году уже упоминавшийся нами Цулауф доказал, что неравенство неверно для нечетных $n \geqslant 53$. В 1961 году Диананда, ученый из Сингапура, привел контрпример для $n=27$. Опровергающий пример для $n=25$ был построен английским математиком Дейкиным в 1971 году. Двум школьникам математической школы-интерната при Ленинградском университете (ученикам одного из авторов) Р. Алексееву и Е. Фошкину, используя ЭВМ, удалось самостоятельно построить контрпример для $n=25$:
32, 0, 37, 0, 43, 0, 50, 0, 59, 8, 62, 21, 55, 29, 44, 32, 33, 31, 24, 30, 16, 29, 10, 29, 4.

Совсем недавно, в октябре 1989 года американский математик Трош опубликовал доказательство справедливости неравенства для всех оставшихся n, а именно для 13, 15, 17, 19, 21 и 23. Правда, для этого было достаточно доказать неравенство для $n=23$, что он и сделал.

С 1956 года, когда было установлено, что неравенство $f_n \geqslant \frac{n}{2}$ неверно, исследования велись в двух направлениях. Первое — это выяснение, для каких же n неравенство верно. О состоянии этого вопроса мы уже рассказали. К рассказу о другом направлении исследований мы сейчас перейдем.

В 1957 году Ранкин доказал, что справедливо неравенство $f_n \geqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{6} n = \frac{n}{2} \cdot 0{,}609\ldots$ Он же в 1961 году несколько улучшил свой результат: $f_n \geqslant \frac{n}{2} \cdot 0{,}661$. В том же году Диананда сумел доказать, что $f_n \geqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \cdot 0{,}914\ldots$. В 1962 году он доказал, что $f_n \geqslant \frac{n}{2} \times 0{,}922\ldots$, т. е. встал вопрос о том, каково же наибольшее число γ, для которого неравенство $f_n \geqslant \gamma \cdot \frac{n}{2}$ верно при любых натуральных n. Именно эту задачу решил Володя Дринфельд.

А началось все с того, что в 1969 году на Третьей Всесоюзной математической олимпиаде было предложено доказать неравенство $\frac{x_1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2} > \frac{n}{4}$. Из всех участников ее сумел решить один школьник — ученик математической школы-интерната при Ленинградском университете А. Берзиньш, трехкратный победитель Всесоюзных олимпиад.

Решение здесь таково. Пусть x_{i_1} — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_{i_2} — наибольшее из двух следующих за x_{i_1} чисел; x_{i_3} — наибольшее из двух следующих за x_{i_2} чисел и так далее. Пусть k таково, что максимальное из двух следующих за x_{i_k} чисел — это x_{i_1}. Ясно, что $k \geqslant \frac{n}{2}$, и поэтому

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2} > \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}} + \frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}} + \ldots + \frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}} \geqslant \frac{k}{2} \geqslant \frac{n}{4}.$$

То, что последняя сумма не меньше чем $\frac{k}{2}$, следует из неравенства Коши $a_1+a_2+\ldots+a_k \geqslant k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$.

Одним из победителей этой олимпиады был харьковский школьник Володя Дринфельд. В составе команды Советского Союза он принял участие в Международной математической олимпиаде. Научным руководителем команды был один из крупнейших советских специалистов по неравенствам профессор В. И. Левин. Он рассказал ребятам о циклическом неравенстве, и в этом же 1969 году Володе удалось найти искомое значение γ. Оказалось, что $\gamma=0{,}989\ldots$

Прежде чем рассказать идею работы В. Дринфельда, покажем, как получить более слабые результаты, сформулированные в задаче М1250. Напомним условие этой задачи.

М1250. *Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, то*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$

больше чем а) $(\sqrt{2}-1)n$; б) $\frac{5}{12}n$; в) если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют монотонную последовательность, то эта сумма не меньше $\frac{n}{2}$.

Решение

а) Каждую из дробей

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\ (i=1, 2, \ldots, n)$$

представим в виде

$$\frac{x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\frac{\frac{1}{2}x_{i+1}+x_{i+2}}{x_{i+1}+x_{i+2}}-1.$$

Мы получим $2n$ дробей и сгруппируем их по парам — первую дробь с $2n$-й; вторую с третьей; четвертую с пятой и так далее. Оценим сразу сумму чисел, образующих какую-то пару:

$$\frac{\frac{1}{2}x_i+x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}+\frac{x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}x_i+x_{i+1}\right)\left(x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}\right)}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}=$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{x_ix_{i+1}}{4(x_i+x_{i+1})^2}\right)\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}>$$

$$>\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}.$$

Так как произведение n чисел

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}, \sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}$$

равно 1, то из неравенства Коши следует, что их сумма не меньше n. Поэтому исходная сумма больше чем $\sqrt{2}n-n=(\sqrt{2}-1)n$.

б) При доказательстве пункта а) мы к каждой дроби добавили по единице. Но почему нужно прибавлять именно единицу? Давайте прибавим произвольное число α и подберем β так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\alpha=\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+$$

$$+\frac{\alpha(\beta x_{i+1}+x_{i+2})}{x_{i+1}+x_{i+2}}.$$

Ясно, что $\beta+\alpha\beta=\alpha$, т. е. $\beta=\frac{\alpha}{\alpha+1}$. Следовательно,

$$\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\frac{\alpha(\beta x_i+x_{i+1})}{x_i+x_{i+1}}\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{\alpha\frac{(x_i+\beta x_{i+1})(\beta x_i+x_{i+1})}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}=$$

$$=2\sqrt{\alpha\frac{\beta(x_i+x_{i+1})^2+(\beta-1)^2x_ix_{i+1}}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}>$$

$$>2\sqrt{\alpha\beta\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}.$$

Значит,

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}>$$

$$>\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}+\sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}\right)-\alpha n>$$

$$>\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}n-\alpha n=\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha\right)\cdot n.$$

Если положить $\alpha=\frac{5}{4}$, то $\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha=\frac{5}{12}=0{,}416\ldots$ и утверждение пункта б) доказано. Напомним, что пункт а) получается, если положить $\alpha=1$.

в) Рассмотрим случай $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Покажем, что здесь имеет место соотношение

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{2}.$$

Действительно, имеет место тождество:

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_1-x_n)}{(x_{n-1}+x_n)(x_1+x_{n-1})} + \frac{(x_1-x_n)(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_{n-1})}{2(x_{n-1}+x_n)(x_1+x_n)(x_1+x_{n-1})} + \frac{(x_{n-1}-x_n)(x_2-x_n)}{(x_1+x_2)(x_1+x_n)} + \frac{1}{2}.$$

Но все слагаемые неотрицательны (из монотонности последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Итак,

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{2} \geqslant f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) + 1 \geqslant \ldots \geqslant f_2(x_1, x_2) + \frac{n-2}{2} = \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_1} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Заметим, что

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1+x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n+x_1}{x_1+x_2} - n + \frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_1}{x_n+x_1}.$$

Но первая сумма не меньше n, так как произведение всех слагаемых равно 1. Поэтому достаточно показать, что

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_1}{x_n+x_1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Для этого покажем, что

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Действительно,

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) - \frac{1}{2} = \frac{x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_1}{x_n+x_1} - \frac{x_1}{x_{n-1}+x_1} - \frac{1}{2} = \frac{(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_{n-1})(x_n-x_1)}{2(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)(x_1+x_{n-1})} \geqslant 0.$$

Итак,

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{2} \geqslant g_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) + 1 \geqslant \ldots \geqslant g_2(x_1, x_2) + \frac{n-2}{2} = \frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_1}{x_2+x_1} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}.$$

Теперь изложим доказательство В. Дринфельдом его результата. Оно опирается на два замечательных неравенства.

В первом участвуют два набора из n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Рассмотрим выражение $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Утверждение состоит в том, что это выражение принимает максимальное значение, если числа занумерованы так, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, а минимальное, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n, \text{ а } b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n.$$

Второе неравенство, называемое неравенством Иенсена, связано с выпуклыми функциями. Функция $\varphi(x)$ называется *выпуклой* на отрезке $[a; b]$, если ее значения на любом отрезке $[x_1; x_2]$ из $[a; b]$ лежат на графике ниже, чем отрезок, соединяющий точки $(x_1; \varphi(x_1))$ и $(x_2; \varphi(x_2))$ (рис. 1). Это определение можно записать в виде неравенства

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2).$$

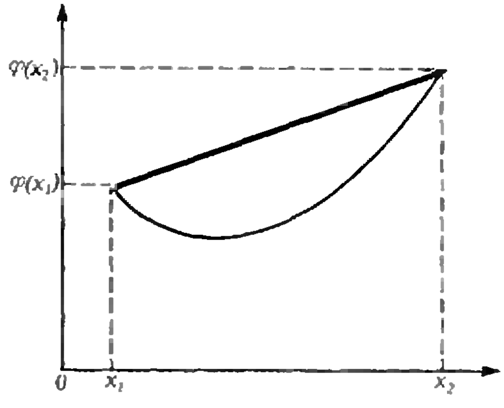


Рис. 1.

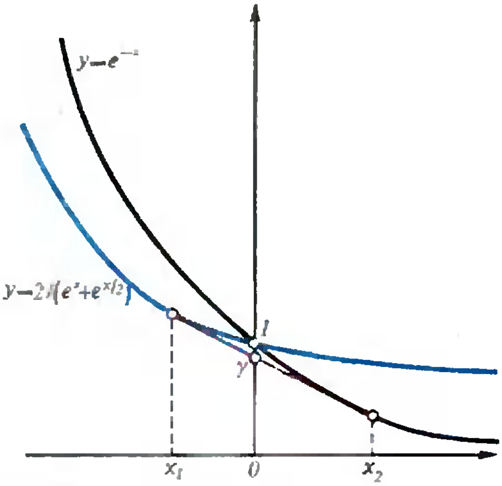


Рис. 2.

Неравенство Иенсена утверждает, что для любой выпуклой на отрезке $[a;\ b]$ функции $\varphi(x)$, произвольного набора точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из этого отрезка, а также произвольного набора положительных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, в сумме равных 1 $(p_1+p_2+\ldots+p_n=1)$, имеет место соотношение

$$\varphi(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)\leqslant p_1\varphi(x_1)+\ldots+p_n\varphi(x_n).$$

Приступим к изложению доказательства. Обозначим $\frac{x_{i+1}}{x_i}=k_i$, причем $\frac{x_1}{x_n}=k_n$. Расположим полученные числа k_i в порядке возрастания, а члены возникшей последовательности обозначим через m_i. Теперь рассмотрим две последовательности:

$$\frac{1}{m_1},\ \frac{1}{m_2},\ \ldots,\ \frac{1}{m_n}\ \text{и}$$

$$\frac{1}{1+m_n},\ \frac{1}{1+m_{n-1}},\ \ldots,\ \frac{1}{1+m_2},\ \frac{1}{1+m_1}.$$

Одна монотонно убывает, а вторая монотонно возрастает. Используя первое наше неравенство, получаем, что

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}=$$
$$=\frac{1}{k_1(k_2+1)}+\frac{1}{k_2(k_3+1)}+\ldots+\frac{1}{k_n(k_1+1)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{m_1(m_n+1)}+\frac{1}{m_2(m_{n-1}+1)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{m_n(m_1+1)}. \qquad (*)$$

Обозначим $m_i\cdot m_{n-i+1}=c_i$ и

$$r_i=\frac{1}{m_i(m_{n-i+1}+1)}+\frac{1}{m_{n-i+1}(m_i+1)},$$

тогда

$$r_i=\frac{1}{c_i}\left(1+\frac{c_i-1}{(1+m_i)(1+m_{n-i+1})}\right).$$

Так как $(1+m_i)(1+m_{n-i+1})\geqslant(1+\sqrt{c_i})^2$, то

$$r_i\geqslant\begin{cases}\frac{1}{c_i}, & c_i\geqslant 1,\\ \frac{2}{c_i+\sqrt{c_i}}, & c_i<1.\end{cases} \qquad (**)$$

Положим $c_i=e^{y_i}$. Из неравенств $(*)$ и $(**)$ имеем

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{c_i\geqslant 1}e^{-y_i}+\sum_{c_i<1}2\left(e^{\frac{y_i}{2}}+e^{y_i}\right)^{-1}\right). \qquad (***)$$

Пусть g — наибольшая выпуклая функция, не превосходящая функций $y=e^{-x}$ и $y=2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^x\right)^{-1}$. Тогда из неравенства $(***)$, в силу неравенства Иенсена, имеем

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(y_i)\geqslant g\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)=g(0).$$

Тем самым доказано, что $\gamma\geqslant g(0)$.

Далее довольно изящными рассуждениями доказывается, что $g(0)=\gamma$.

Пусть общая касательная соединяет точки $(x_1;\ e^{-x_1})$ и $(x_2;\ 2(e^{\frac{x_2}{2}}+e^{x_2})^{-1})$ (рис. 2). График функции g состоит из трех частей: $y=e^{-x}$ при $x\geqslant x_1$, $y=2(e^x+e^{\frac{x}{2}})^{-1}$ при $x\leqslant x_2$ и их общей касательной при $x_2\leqslant x\leqslant x_1$. Ордината точки пересечения касательной с осью ординат и есть γ.

МОЯ ПЕРВАЯ НАУЧНАЯ НЕУДАЧА

Академик АПН СССР
В. ФАБРИКАНТ

Моя первая, но, к сожалению, не последняя крупная научная неудача связана с участием в первых работах по исследованию комбинационного рассеяния света.

Явление комбинационного рассеяния света было открыто в 1928 году советскими физиками Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом в кристаллах и, независимо, индийским физиком Ч. Раманом в жидкостях. Эффект комбинационного рассеяния получил название эффекта Рамана, и Раман был удостоен Нобелевской премии. Советские физики премию не получили, что явно несправедливо.

История этого открытия довольно своеобразна.

В 1923 году австрийский физик Смекал опубликовал теоретическую работу, в которой дал совершенно четкое предсказание явления комбинационного рассеяния света. В 1926 году голландец Крамерс и немец Гейзенберг повторили предсказание Смекала в более развернутом виде. Французские физики Рокар и Кабанн пытались экспериментально подтвердить предсказания теоретиков, однако потерпели неудачу ввиду слабости эффекта.

Комбинационное рассеяние представляет одну из разновидностей молекулярного рассеяния света. Здесь хочется вспомнить одну поучительную историю, связанную с рождением теории молекулярного рассеяния.

О голубом цвете неба

Максвелл, экзаменуя Рэлея, будущего знаменитого физика, предложил ему, в качестве задачи, дать объяснение голубого цвета неба. Рассказывают, что Максвелл намекнул Рэлею, что явление должно быть связано с молекулярной структурой воздуха. Еще Леонардо да Винчи было ясно, что голубой цвет неба объясняется «телесностью воздуха», рассеянием солнечного света атмосферой. Рэлей рассмотрел этот вопрос с позиции волновой теории света. Световая волна, распространяющаяся в атмосфере, вызывает колебания в молекулах воздуха (теперь мы скажем «колебания электронов», Рэлей и Максвелл еще не знали об их существовании). Молекулярные колебания сопровождаются испусканием световых волн. Молекулы работают подобно ретрансляционным радиостанциям. Каждая молекула испускает вторичные волны, которые, согласно Рэлею, и составляют рассеянный свет. При этом Рэлей показал, что интенсивность света, рассеянного каждой молекулой, обратно пропорциональна четвертой степени длины волны рассеиваемого света (этот закон был им установлен в 1871 г.). Тем самым, голубой цвет неба был объяснен — синие и голубые лучи обладают более короткими длинами волн, чем красные и желтые, поэтому голубые и синие лучи рассеиваются сильнее. Количественное сравнение результатов экспериментального исследования с расчетами Рэлея дало прекрасное совпадение. Максвелл, очевидно, был доволен своим учеником, и работа Рэлея была опубликована. Как будто все обстояло хорошо.

Однако в 1907 году Мандельштам обратил внимание на то, что в рассуждении Рэлея есть слабое место. Существует поговорка: «Победителей не судят». Эта поговорка не совсем соответствует действительности. Победителей всегда судят за средства, которыми достигнута победа, за ее цену. В науке победителя судят всегда. Совпадение результатов теории и эксперимента есть необходимое, но отнюдь не достаточное свидетельство правильности теории.

В данном случае Мандельштам обратил внимание на то, что вторичные волны, рассеянные отдельными молекулами, когерентны между собой. Это значит, что должно вроде бы происходить интерференционное гашение волн, рассеянных двумя молекулами, расстояние между которыми равно половине длины волны света. Выяснилось, однако (Смолуховский, 1908 г. Эйнштейн, 1910 г.), что этого не происходит благодаря тому, что в пространственном распределении молекул существуют неоднородности (их называют флуктуациями). Те участки, где молекул больше, рассеивают свет сильнее, чем разреженные участки. Впрочем, это уже другая история. Мы же вернемся к явлению комбинационного рассеяния.

Что такое комбинационное рассеяние?

Рассеяние света на молекулах, которое изучал Рэлей при объяснении голубого цвета неба, происходит без изменения частоты (частота рассеянного света равна частоте падающего). Такое рассеяние можно назвать упругим, так как состояние молекулы (или атома) после рассеяния такое же, как до него. При комбинационном рассеянии одновременно с актом рассеяния изменяется состояние молекулы, и рассеянный свет имеет частоту, отличную от частоты падающего. Экспериментально в рассеянном свете были обнаружены две новые линии (сателлиты): одна с частотой, большей падающей, другая — с меньшей. Каково же физическое объяснение этого явления?

Изменение частоты при комбинационном рассеянии света можно объяснить как на квантовом, так и на волновом языке. Как мы увидим, в данном случае квантовый язык проще и правильнее отражает особенности явления.

Квантовое сложение и вычитание

А. Смекал рассматривал комбинационное рассеяние как неупругие столкновения фотонов с атомами и молекулами.

Как известно, согласно квантовой теории, атомы и молекулы могут обладать только определенными запасами внутренней энергии — находиться на определенных энергетических уровнях. Если происходит неупругое столкновение фотона (энергия $h\nu_0$) с невозбужденной молекулой (или атомом), находящейся на нижнем энергетическом уровне E_1, то фотон отдает часть своей энергии и возбуждает молекулу до более высокого энергетического уровня E_2. После такого столкновения от молекулы отлетает фотон с уменьшенной энергией $h\nu_к$ (индекс «к» — от слова «красный»):

$$h\nu_к = h\nu_0 - (E_2 - E_1).$$

Если неупругое столкновение фотона происходит с уже возбужденной молекулой, то она переходит с уровня E_2 на уровень E_1 и возникает фотон с увеличенной энергией $h\nu_ф$ (индекс «ф» — от слова «фиолетовый»):

$$h\nu_ф = h\nu_0 + (E_2 - E_1).$$

В первом случае из кванта лучистой энергии вычитается квант внутримолекулярной энергии, а во втором — происходит сложение этих квантов. В первом случае частота рассеянного фотона меньше частоты фотона, падающего на молекулу:

$$\nu_к = \nu_0 - (E_2 - E_1)/h,$$

во втором — больше:

$$\nu_ф = \nu_0 + (E_2 - E_1)/h.$$

Таким образом, в рассеянном свете наряду с частотой ν_0 (упругие столкновения фотонов с атомами и молекулами) должны появиться частóты $\nu_к$ и $\nu_ф$. В спектре рассеянного света этому соответствуют две спектральные линии (сателлиты), симметрично сдвинутые относительно центральной линии с частотой ν_0. Однако интенсивность саттелитов резко различна. Здесь имеет место сильная асимметрия: интенсивность красного сателлита ($\nu_к$) значительно выше интенсивности фиолетового сателлита ($\nu_ф$). Объясняется эта асимметрия весьма просто. Ведь красный сателлит возникает в результате столкновений фотонов с нормальными атомами или молекулами, а фиолетовый — с возбужденными. Но в обычных условиях возбужденных атомов и молекул всегда значительно меньше, чем нормальных, поэтому и столкновения с ними фотонов происходят гораздо реже, чем с нормальными атомами и молекулами.

Классическое умножение

На классическом языке комбинационное рассеяние аналогично процессу передачи информации по радио. На эту аналогию обратил внимание Л. И. Мандельштам сразу же после экспериментального открытия явления. Передача информации по радио связана с использованием модулирования радиоволн. Мы ограничимся одним типом модулирования, имеющим наиболее широкое применение,— амплитудной модуляцией.

Дело в том, что идеальная волна синусоидальной формы, с унылым постоянством повторяющая свою форму во времени, не способна перенести информацию из одного места в другое. Необходимо нарушить правильность формы волны, сделать на ней «зарубку» и наблюдать переход «зарубки» из одной точки пространства в другую. Такой «зарубкой» служит изменение амплитуды волны. Певец с помощью микрофона модулирует амплитуду радиоволны, и эта волна несет информацию об исполняемой им песне. Звуковые волны с циклической частотой $\omega_{зв}=2\pi\nu_{зв}$ вызывают колебания мембраны микрофона, которые преобразуются в электрические колебания такой же частоты. С их помощью осуществляется амплитудная модуляция радиоволны.

Воспользуемся услугами тригонометрии для более подробной характеристики волны. Пусть амплитуда волны A не постоянна, а равна $1+a\cos(\omega_{зв}t)$; тогда для модулированной волны мы получим следующее выражение:

$$E=(1+a\cos(\omega_{зв}t))\cos\omega_0 t,$$

где ω_0 — циклическая частота несущей волны (радиочастота). Используя известное тригонометрическое соотношение

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

эту формулу можно переписать в виде

$$E=\cos(\omega_0 t)+\frac{a}{2}(\cos(\omega_0+\omega_{зв})t+\cos(\omega_0-\omega_{зв})t).$$

Таким образом, модулированную волну можно рассматривать как состоящую из трех волн, каждая из которых имеет постоянную амплитуду. Частоты этих волн ω_0, $\omega_0+\omega_{зв}$ и $\omega_0-\omega_{зв}$.

Аналогичные явления происходят и при молекулярном рассеянии. При взаимодействии с колеблющейся молекулой (или атомом) происходит как бы «модуляция» падающей волны с частотой, соответствующей частоте колебаний самой молекулы. Значит, аналогично квантовой картине, в спектре расеянного света появляются два сателлита, симметрично сдвинутые относительно центральной линии на частоту колебаний молекулы.

Как видно из полученной формулы, амплитуды этих сателлитов должны быть равны между собой, что противоречит опыту и квантовой картине.

Как я измерял постоянную Планка *h*

Мне, студенту III курса, Г. С. Ландсберг и Л. И. Мандельштам поручили экспериментальную проверку справедливости квантовой теории комбинационного рассеяния света. Одновременно следовало использовать эти измерения как новый метод определения значения h (его нужно было извлечь из измерения интенсивности сателлитов). И тут я потерпел неудачу, так как в 1928 году еще не было ясности в том, что интенсивности сателлитов должны относиться просто как концентрации возбужденных и невозбужденных молекул. Применялась сложная формула, подставив в которую экспериментальные данные, я получил значение h раза в полтора меньше общепринятого. Результат меня обескуражил. Через некоторое время появилась работа французского физика Дора, проделавшего те же эксперименты, но воспользовавшегося правильной формулой для интенсивности сателлитов и получившего значение h, хорошо согласующееся с общепринятым. После обработки по правильной формуле мои данные тоже дали прекрасное согласие, но я посчитал, что публиковать их нет смысла, несмотря на предложение моих учителей. Дело ограничилось ссылкой в одной из статей Ландсберга и Мандельштама, опубликованной в 1930 году.

Любопытно, что неправильность формулы, которой пользовался я, связана с предположением о значительной роли в комбинационном рассеянии актов вынужденного испускания фотонов, введенных в физику Эйнштейном*). Через десять лет, в 1940 году, я указал на возможность экспериментального обнаружения вынужденного испускания фотонов. В 1951 году я совместно с Бутаевой и Вудынским описал в авторской заявке способ усиления света, основанный на использовании этих актов. Мы получили соответствующее авторское свидетельство. Как известно, указанный способ усиления света применяется в лазерах. К сожалению, я не указал в явной форме на очень важное свойство — на когерентность испущенного и падающего излучений. Именно это свойство акта вынужденного излучения и позволяет создавать оптические лазерные генераторы.

*) При вынужденном излучении падающий фотон не изменяет свою энергию, а лишь дает «сигнал» к излучению молекулой (атомом) дополнительного фотона.

В. А. Фабрикант (1907—1991)

3 марта 1991 года на 84-м году жизни скончался замечательный ученый и педагог, лауреат Государственной премии СССР, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии педагогических наук СССР Валентин Александрович Фабрикант.

За свою долгую творческую жизнь Валентин Александрович сумел многое — сделать замечательные открытия (он — основоположник работ по параметрическому усилению света, заложивших основу создания лазеров), воспитать плеяду учеников, написать прекрасные книги.

В. А. Фабрикант стоял и у истоков создания нашего журнала. Являясь бессменным членом редакционной коллегии, он был большим другом читателей и редакции. Когда Валентин Александрович приходил в редакцию, его деликатность, обаяние и интеллигентность привлекали к нему окружающих, создавали вокруг него ту атмосферу аристократии духа, которая ассоциируется у нас сегодня с университетской жизнью начала века.

До последних дней Валентин Александрович не прекращал свою научную, педагогическую и просветительскую деятельность. Вот и сейчас скорбная весть о его кончине застала редакцию за подготовкой к публикации его статьи — той, что лежит перед вами. В этой статье В. А. Фабрикант обращается к дням своей молодости. Его работа — яркий пример критического отношения ученого к результатам своего труда, отношения, которое присуще таланту и является движущей силой прогресса.

Редакционная коллегия
Редакционный совет
Редакция журнала «Квант»

Задачник „Кванта"

Задачи

М1276 — М1280, Ф1283 — Ф1287

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июня 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1276» или «Ф1283». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1276. Для данной хорды MN окружности рассматриваются треугольники ABC, основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN, а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN. Докажите что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.

Е. Куланин

М1277. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}\geqslant n\sqrt{2}.$$

Л. Курляндчик

М1278. Имеется n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что $x_ix_j\leqslant-1/n$ для некоторых i и j.

Е. Столов

М1279. На плоскости Oxy расположено n непересекающихся квадратов со стороной 1, стороны которых параллельны осям. Известно, что любые два из них можно пересечь прямой, параллельной одной из осей. Докажите, что можно одной прямой, параллельной оси, пересечь некоторые $n-2$ квадрата.

А. Анджанс

М1280*. Докажите, что в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$ встретится

а) не менее 20 одинаковых цифр подряд;

б) последовательность цифр 123456789.

А. Коробов

Ф1283. Перед закрытым шлагбаумом стоит человек с тяжелой тележкой. Ему нужно как можно быстрее попасть в магазин, находящийся на расстоянии 300 м от шлагбаума. Максимальная сила, с которой человек может действовать на тележку, 500 Н, наибольшая скорость тележки 5 м/с, масса нагруженной тележки 2000 кг. Известно, что шлагбаум откроется ровно через 30 с. За какое минимальное время человек сможет доставить груз в магазин?

А. Коршков, Н. Коршкова

Ф1284. Большой сосуд массой m заполняют водой через небольшое отверстие в дне сосуда (рис. 1). Для того чтобы закачать в сосуд воду массой M, пришлось совершить работу A. Отверстие открывают, и вода начинает вытекать. Одновременно поднимают сосуд так, чтобы верхняя граница воды в нем оставалась на одной высоте относительно земли. Какую работу придется совершить до того момента, когда сосуд опустеет?

Н. Кузьма

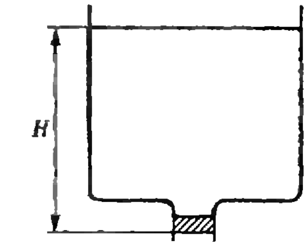


Рис. 1.

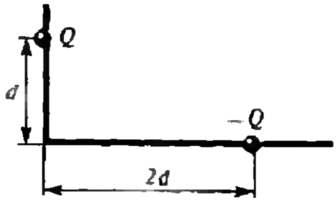


Рис. 2.

Задачник «Кванта»

Ф1285. На квадратном деревянном плоту размером $2\times2\times0{,}3$ м, сделанном из дерева плотностью 800 кг/м^3, стоит физик массой 80 кг. На какое расстояние от центра плота он должен отойти, чтобы край плота окунулся в воду?

Ф1286. На непроводящий стержень, изогнутый под прямым углом, насажены две бусинки равной массы M, несущие заряды противоположных знаков Q и $-Q$ (рис. 2). В начальный момент бусинки неподвижны и находятся на расстояниях d и $2d$ от вершины угла. Отпустим их. Где окажется «дальняя» бусинка в тот момент, когда «ближняя» доедет до вершины угла? Найдите скорости бусинок в тот момент, когда расстояние между ними составит d.

Ф1287. Неподалеку от включенного в сеть трансформатора поместили замкнутый виток из медной проволоки. Ток в нем оказался сдвинутым по фазе на $\pi/4$ относительно тока в обмотке трансформатора. Во сколько раз изменится мощность, рассеиваемая в витке, если сделать его не из меди, а из нихрома, сохранив все размеры неизменными? Удельное сопротивление у нихрома в 65 раз выше, чем у меди. Амплитуду тока в обмотке трансформатора считать одинаковой в обоих случаях.

А. Зильберман

Решения задач

М1251 — М1255, Ф1263 — Ф1267

М1251. На плоскости дан угол (меньший развернутого). Проведите два отрезка PM и QM с заданной суммой длин s, отрезающие от угла четырехугольник наибольшей площади (P и Q — точки на сторонах угла, M — внутри угла).

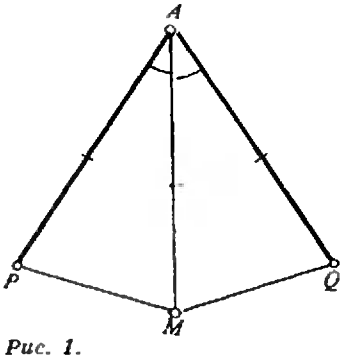


Рис. 1.

Ответ: искомая точка M лежит на биссектрисе угла, причем $AM=AP=AQ$ (A — вершина угла; рис. 1) — эти условия позволяют построить M очевидным образом.

Мы начнем с произвольных точек M, P и Q, для которых задана сумма $PM+MQ$, и в несколько шагов передвинем их так, чтобы получилось расположение, указанное в ответе, причем площадь $APMQ$ на каждом шаге будет увеличиваться (точнее, не уменьшаться).

1°. Заменим четырехугольник $APMQ$ выпуклым (если первоначально он невыпуклый).

Для этого заменим M на точку M', симметричную M относительно середины отрезка PQ. Ясно, что M' лежит внутри угла (и даже внутри параллелограмма $APA'Q$; рис. 2), $PM+MQ=PM'+M'Q$, а площадь четырехугольника возрастает.

2°. Фиксируем ΔPQM и переместим его внутри угла так, чтобы $AP=AQ$.

Удобнее двигать не треугольник, а вершину угла A, сохраняя его величину, т. е. по дуге окружности PAQ (рис. 3). Площадь ΔAPQ станет наибольшей, когда A попадет в середину дуги.

3°. Переместим M параллельно PQ на биссектрису угла A и подвергнем всю фигуру гомотетии с цент-

Задачник «Кванта»

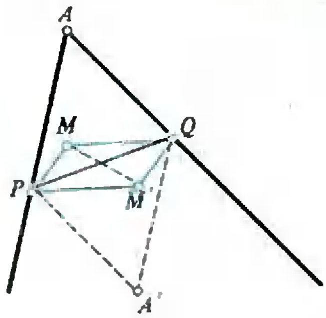


Рис. 2.

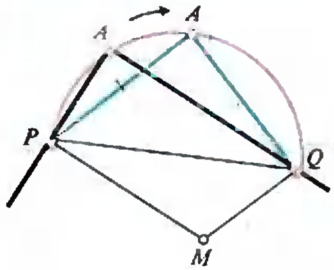


Рис. 3.

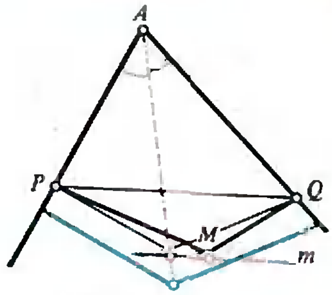


Рис. 4.

ром A так, чтобы восстановилась заданная величина суммы $PM+MQ$ (рис. 4).

При сдвиге M площадь $APMQ$ не меняется, но сумма расстояний PM и MQ, вообще говоря, уменьшится. (Вспомним, что наименьшее значение $PM+MQ$ для точек M на данной прямой m достигается, когда PM и MQ составляют равные углы с m, поскольку $PM+MQ=P'M+MQ$, где точка P' симметрична P относительно m.) Следовательно, при последующей гомотетии площадь $APMQ$ может только возрасти.

Остается заметить, что полученный после шага 3^0 «дельтоид» $APMQ$ состоит из двух равных треугольников APM и AQM, в которых известны основание: $PM=QM=(PM+QM)/2$ и угол при вершине: $\angle PAM=\angle QAM=\angle A/2$. А мы уже видели (шаг 2^0), что при этих условиях площадь треугольника максимальна, когда он равнобедренный, т. е. когда $AP=AM=AQ$.

Н. Васильев, В. Сендеров

М1252. *Пусть a и n — натуральные числа. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем a^n-1 делится на n.*

Пусть $x=\overline{x_nx_{n-1}\ldots x_1}$ — запись числа $x<a^n-1$ в системе счисления по основанию a, т. е. $x=x_n\cdot a^{n-1}+x_{n-1}\cdot a^{n-2}+\ldots+x_1\cdot a^0$, где $0\leqslant x_i\leqslant a-1$, $i=1, \ldots, n$ (запись может начинаться с нулей). Покажем, что если x взаимно просто с числом $A=a^n-1$, то все числа, получаемые циклическими перестановками цифр в a-ичной записи x 1) взаимно просты с A и 2) различны. (Отсюда следует, что все такие числа разбиваются на непересекающиеся группы по n штук в каждой, а значит, их количество делится на n.)

1) Проверим, что при перестановке первой a-ичной цифры x_n числа x в конец снова получается взаимно простое с A число:

$$\overline{x_{n-1}\ldots x_1x_n}=\overline{x_nx_{n-1}\ldots x_10}-\overline{x_10\ldots00}+x_1=$$
$$=ax-x_1(a^n-1)=ax-Ax_1 -$$

это число взаимно просто с A, т. к. a и x взаимно просты с A.

2) Допустим, что при какой-то циклической перестановке цифр получилось исходное число x, т. е.

$$x = \overline{x_n\ldots x_1} = \overline{x_k x_{k-1}\ldots x_1 x_n\ldots x_{k+1}}.$$

Тогда

$$x(a^k-1) = \overline{x_k\ldots x_1 x_n\ldots x_{k+1}}\cdot a^k - \overline{x_n\ldots x_1} =$$
$$= \overline{x_k\ldots x_1}\cdot a^n - \overline{x_k\ldots x_1} = \overline{x_k\ldots x_1}\cdot A.$$

Но x и A взаимно просты, следовательно, a^k-1 делится на $A=a^n-1$, т. е. $k=n$, и наша перестановка — тождественная. (Можно и непосредственно показать, что если запись x переходит в себя при нетождественной циклической перестановке, то она состоит из повторенной несколько раз группы цифр, а тогда x, очевидно, не взаимно просто с $a^n-1=(a-1)\cdot 11\ldots 1$.)

К. Кохась

M1253*. *На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников — «карта» нескольких «стран». Будем говорить, что такая карта реализуема в пространстве, если она является проекцией «выпуклой шапочки», т. е. если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — M, а проекция остальных граней на плоскость грани M — страны этой карты (и, быть может, стороны M).*

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.

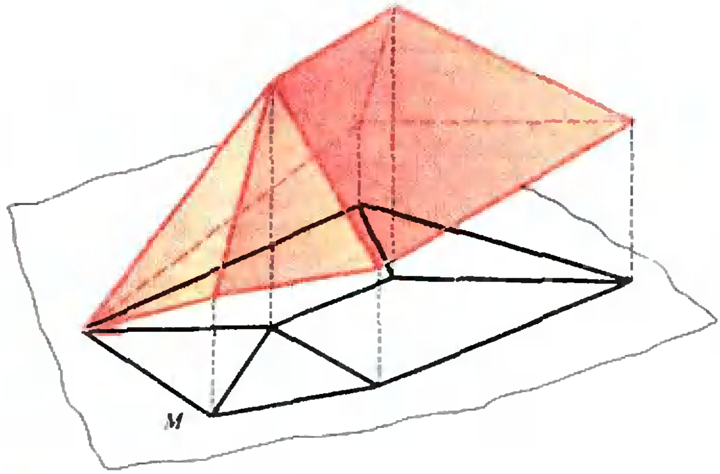
Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны — остроугольные треугольники,

в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

Формулировка задачи М1253 вызвала у некоторых читателей недоуменные вопросы. Приводим уточненную формулировку; срок отправки решений п р о д л е в а е т с я до 15 июня 1991 года.

(Старую формулировку можно понять так, что края «шапочки» примыкают к сторонам многоугольника, т. е. у многогранника нет «вертикальных» боковых граней; в этом случае утверждения б) и в) очевидно неверны. Впрочем, было бы интересно получить необходимые или достаточные условия «реализуемости» и в таком, более узком, смысле.)

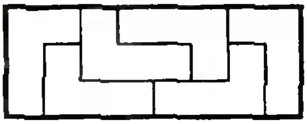


M1254. *На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $m\times n$ клеток,*

Необходимость условия «mn делится на 8», как часто в подобных задачах, можно доказать с помощью подходящей раскраски. Пусть прямоугольник $m\times n$ раз-

Задачник „Кванта"

$m \geqslant n > 1$. Докажите, что его можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы Г в том и только в том случае, если mn делится на 8.



резан на Г-образные фигуры из 4 клеток. Тогда число этих фигур $N = mn/4$. Одно из чисел — скажем, число строк m — четно. Раскрасим строки попеременно в белый и черный цвет. Каждая фигура Г из 4 клеток содержит либо одну, либо три черные клетки. Поскольку общее число черных клеток $mn/2 = 2N$ четно, то число N фигур должно быть четным (иначе сумма N слагаемых, равных 1 или 3, была бы нечетной). Поскольку $mn/4$ четно, mn делится на 8.

Для доказательства достаточности по существу нужно лишь убедиться, что можно разрезать прямоугольник 3×8 (см. рисунок). Дело в том, что любой прямоугольник вида $8k \times n$, где n нечетно, можно составить из прямоугольников 3×8 и 2×4, а прямоугольник $m \times n$, где m и n четны — разбить на прямоугольники 2×4. *Последние* же, очевидно, разрезаются на две «буквы Г».

Н. Васильев, Б. Гинзбург

М1255. Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее из расстояний между двумя его скрещивающимися ребрами. Докажите неравенства $1/2 < d/h < 3/2$.

Рассмотрим *параллелепипед*, описанный около данного тетраэдра T, как показано на рисунке 1. Высоты h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) тетраэдра и расстояния d_k ($k = 1, 2, 3$) между его противоположными ребрами можно выразить через объем V параллелепипеда, площади его граней и площади граней тетраэдра. Действительно, величины d_k — это высоты *параллелепипеда*, поэтому $V = d_k \cdot S_k$, где S_k — площади его соответствующих граней. С другой стороны, тетраэдр T получается из параллелепипеда отрезанием четырех тетраэдров, объем каждого из которых, очевидно, равен $V/6$. Следовательно, объем тетраэдра равен $(1 - 4/6)\,V = V/3$, а значит, $V = h_i \cdot s_i$, где s_i — площадь грани *тетраэдра*, перпендикулярной высоте h_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Итак,

$$h_i = V/s_i, \quad d_k = V/S_k.$$

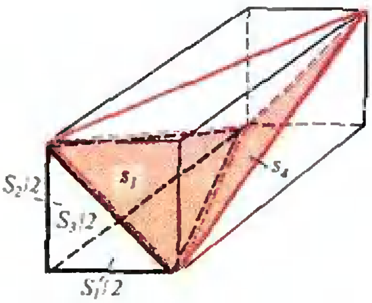


Рис. 1.

Пусть, для определенности $h_1 = h$ и $d_1 = d$ — наименьшие из величин h_i *и* d_k *соответственно*. Рассмотрим тот из четырех тетраэдров, дополняющих T до параллелепипеда, который примыкает к T по грани площади s_1. Площади трех *других* его граней равны $S_1/2$, $S_2/2$ и $S_3/2$ и их сумма больше s_1, поскольку их проекции на грань s_1 полностью ее покрывают:

$$s_1 < (S_1 + S_2 + S_3)/2 \leqslant 3S_1/2$$

(S_1 — наибольшая из площадей S_k). Отсюда

$$d < 3h_1/2.$$

Докажем теперь, что

$$2S_1 < (s_1 + s_2 + s_3 + s_4),$$

отсюда будет следовать, что $S_1 < 2s_1$ (s_1 — наибольшая из площадей s_i), т. е. что $h_1 < 2d_1$. *Для этого* рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью, параллель-

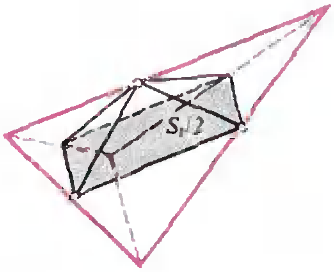


Рис. 2.

ной граням площади S_1 параллелепипеда и равноудаленной от них (рис. 1, 2). Легко видеть, что это параллелограмм Π, стороны которого параллельны диагоналям этих граней и вдвое короче их. Поэтому его площадь равна $S_1/2$. Теперь рассмотрим четырехугольную пирамиду с вершиной в центре одной из этих граней и основанием Π (рис. 2). Площади ее боковых граней, очевидно, равны $s_i/4$, $i=1, 2, 3, 4$, а их сумма больше площади основания, т. е.

$$S_1/2<(s_1+s_2+s_3+s_4)/4,$$

что и требовалось доказать.

Доказанные неравенства для площадей можно вывести из равенств, связывающих векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$, $\bar{s}_4$, равные по длине площадям s_i граней тетраэдра, перпендикулярных соответствующим граням и направленных вне тетраэдра, и аналогичные векторы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$, $\bar{S}_4=-\bar{S}_1$, $\bar{S}_5=-\bar{S}_2$, $\bar{S}_6=-\bar{S}_3$ для параллелепипеда. А именно, если грани тетраэдра и параллелепипеда занумерованы так, что общее ребро i-й и 4-й граней тетраэдра является диагональю i-й грани параллелепипеда ($i=1, 2, 3$), то $\bar{s}_i+\bar{s}_4=\bar{S}_i$. (Докажите это, рассматривая ортогональную проекцию вдоль этого ребра.) Отсюда, в частности, следует, что $S_1<s_1+s_4$ и, аналогично, $S_4=S_1<s_2+s_3$, т. е. $S_1<(s_1+s_2+s_3+s_4)/2$. С другой стороны, складывая три равенства $\bar{s}_i+\bar{s}_4=\bar{S}_i$ и учитывая, что $\bar{s}_1+\bar{s}_4+\bar{s}_2+\bar{s}_3=\bar{S}_1+\bar{S}_4=\bar{0}$, получим: $2\bar{s}_1=\bar{S}_1+\bar{S}_2+\bar{S}_3$. Это равенство дает оценку $s_1<(S_1+S_2+S_3)/2$.

В. Дубровский, А. Скопенков

Поправка

В условии задачи М1267 («Квант», 1991, № 2) допущена опечатка. В предпоследней строке условия задачи должно быть $a_1+a_2+\ldots+a_k$.

***Ф1263.** При разгоне ракеты масса ее уменьшается. При какой скорости ракеты будет максимальной ее кинетическая энергия, если расход топлива постоянен? Скорость газов относительно ракеты v_0, начальная скорость ракеты равна нулю. Разгон производят далеко от Земли, так что влиянием силы тяжести можно пренебречь.*

В тот момент, когда кинетическая энергия ракеты $E_k=Mv/2$, где M — масса, v — скорость ракеты, максимальна, ее производная по времени равна нулю:

$$E_k'=\frac{1}{2}(M\cdot v^2)'=\frac{1}{2}M'\cdot v^2+\frac{1}{2}M\cdot 2vv'=0,$$

или

$$v=-2\frac{M}{M'}v'=2\frac{M}{\mu}v'.$$

Поскольку $-M'=\mu$ — это расход топлива, который по условию постоянен, получаем, что скорость ракеты v, соответствующая ее максимальной кинетической энергии, зависит от ускорения ракеты $a=v'$ в этот момент времени. Найдем его.

Выберем очень малый промежуток времени Δt и запишем закон сохранения импульса (см. рисунок):

$$\mu\Delta t(v-v_0)+(M-\mu\Delta t)(v+\Delta v)=Mv.$$

После несложных преобразований, учтя, что $\mu\Delta t\ll M$, получаем

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\mu}{M}v_0.$$

Таким образом, искомая скорость оказывается равной

$$=2\frac{M}{\mu}v'=2v_0.$$

Д. Александров

***Ф1264.** Вычислите диаметр, массу и длину вольфрамовой нити накала лампочки 220 В, 100 Вт. Рабочая температура нити 2700 °С. При этой температуре удельное сопротивление вольфрама $\rho=90\cdot10^{-6}$ Ом · см, а мощность излучения с единицы поверхности нити $W=153$ Вт/см^2. Плотность вольфрама в 19 раз больше плотности воды. Считайте, что нить свита из проволоки круглого сечения.*

Пусть нить имеет радиус R и длину l. Тогда ее сопротивление

$$r=\rho\frac{l}{S}=\rho\frac{l}{\pi R^2}.$$

С другой стороны, мощность лампочки $P=U^2/r$, откуда

$$r=\frac{U^2}{P}.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$\frac{U^2}{P}=\rho\frac{l}{\pi R^2}. \qquad (1)$$

Вся мощность излучается с поверхности нити, поэтому

$$P=W2\pi Rl. \qquad (2)$$

Деля соотношение (1) на соотношение (2), находим

$$\frac{U^2}{P^2}=\frac{\rho}{2\pi^2R^3W}\Rightarrow R^3=\frac{\rho P^2}{2\pi^2WU^2}.$$

Следовательно, радиус нити

$$R=\sqrt[3]{\frac{\rho P^2}{2\pi^2WU^2}}=0{,}018\text{ мм},$$

ее диаметр

$$d=2R=0{,}036\text{ мм},$$

длина нити

$$l=\frac{P}{2\pi RW}=57\text{ см},$$

ее масса

$$m=D\pi R^2l=19D_{\text{в}}\pi R^2l=0{,}011\text{ г}.$$

М. Цыпин

***Ф1265*.** В однородном магнитном поле вращается по круговой орбите электрон. Индукцию поля медленно (за время, во много*

На электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, которая сообщает ему центростремительное ускорение. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R}=evB,$$

раз превышающее период обращения) увеличивают в три раза. Во сколько раз изменится радиус орбиты электрона?

откуда получаем

$$\frac{mv}{R}=eB. \qquad (*)$$

Медленное изменение магнитного поля приводит к тому, что величины B, R и v начинают зависеть от времени, хотя соотношение (*) по-прежнему выполняется.

Изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, напряженность которого равна

$$E_{\text{инд}}=\frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{2\pi R}=\frac{\pi R^2\frac{\Delta B}{\Delta t}}{2\pi R}.$$

Это поле создает силу

$$F_{\text{инд}}=eE_{\text{инд}}.$$

Работа этой силы за малое время Δt равна изменению кинетической энергии электрона:

$$\frac{1}{2}Rev\cdot\Delta B=\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right)\approx mv\cdot\Delta v,$$

откуда изменение скорости будет равно

$$\Delta v\approx\frac{Re}{2m}\cdot\Delta B.$$

С другой стороны, из соотношения (*)

$$v=\frac{eBR}{m}=\Delta v\approx\frac{e}{m}(\Delta B\cdot R+B\cdot\Delta R).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}R\cdot\Delta B\approx\Delta B\cdot R+B\cdot\Delta R\Rightarrow B\cdot\Delta R+\frac{1}{2}\Delta B\cdot R=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Delta B\cdot R+2B\cdot\Delta R=0\Rightarrow\Delta B\cdot R^2+2B\cdot R\Delta R=0\Rightarrow\Delta(BR^2)=0.$$

Это означает, что при изменении магнитного поля величина BR^2 сохраняется. Поэтому увеличение индукции магнитного поля в три раза приводит к уменьшению радиуса орбиты электрона в $\sqrt{3}$ раз.

М. Цыпин

Ф1266. *Две металлические сферы радиусом R каждая удалены друг от друга на большое расстояние и соединены друг с другом очень тонким проводником, в разрыв которого включена катушка индуктивностью L. На одну из сфер помещают электрический заряд. Через какое время заряд этой сферы уменьшится в два раза?*

При помещении на одну из сфер электрического заряда Q она приобретет потенциал

$$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как на второй сфере заряда вначале нет (мгновенного перетекания заряда не произойдет, иначе ток через катушку был бы бесконечно большим, что невозможно), ее потенциал равен нулю. Из-за наличия разности потенциалов между сферами в катушке индуктивности появится ток, изменяющийся в соответствии с формулой

Задачник «Кванта»

Через какое время заряд снова станет таким же, как в первый момент?

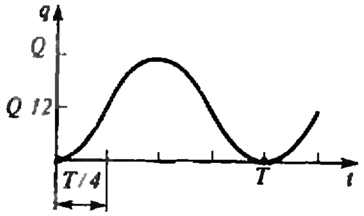


Рис. 1.

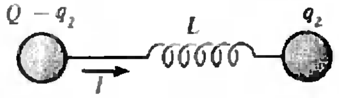


Рис. 2.

$$LI' = U.$$

Понятно, что данная система эквивалентна колебательному контуру — сферы играют роль обкладок конденсатора. Но отличие такого контура от обычного состоит в том, что суммарный заряд конденсатора здесь не равен нулю, что приводит к изменению его эффективной емкости. Найдем ее.

Представим заряд Q на первой сфере в начальный момент в виде суммы $+Q/2$ и $+Q/2$, а нулевой заряд на второй сфере — в виде $+Q/2$ и $-Q/2$. При этом разность потенциалов от зарядов $+Q/2$ на обеих сферах равна нулю, а от оставшихся зарядов $+Q/2$ и $-Q/2$ (их сумма равна нулю) она равна $U_{max} = \varphi_0$. Таким образом, эффективный заряд конденсатора, перетекающий между сферами, есть $Q_{эф} = Q/2$ и

$$C_{эф} = \frac{Q_{эф}}{U_{max}} = 2\pi\varepsilon_0 R.$$

Поскольку индуктивность катушки равна L, в контуре возникают колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC_{эф}} = 2\pi\sqrt{2\pi\varepsilon_0 RL}.$$

Очевидно, что это и есть то время, через которое заряд на первой сфере снова станет таким же, как в первый момент (рис. 1).

Теперь легко найти и время, через которое заряд первой сферы уменьшится в два раза. Действительно, в этот момент заряды на обеих сферах должны быть равны $+Q/2$, а напряжение между сферами — нулю. Это означает, что искомый момент времени соответствует четверти периода колебаний:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 RL}.$$

Заметим, что эту задачу можно решать и более формальным способом. Пусть q_2 — это заряд, перешедший на вторую сферу к моменту времени t (рис. 2). Тогда заряд первой сферы будет $q_1 = Q - q_2$. При этом напряжение на катушке равно разности потенциалов, создаваемой зарядами на сферах:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q/2 - q_2}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Запишем закон изменения тока через катушку: $LI' = U$, или, поскольку $I = q_2'$,

$$Lq_2'' = \frac{Q/2 - q_2}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Перейдем к переменной $q_3 = Q/2 - q_2$ и получили

$$q_3'' = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 RL} q_3.$$

Это — уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi\sqrt{2\pi\varepsilon_0 RL}$. Заряд на первой сфере отличается от заряда q_3 только на постоянную величину, значит, он колеблется с таким же периодом.

А. Быцко

Задачник „Кванта"

Ф1267. Точечный источник альфа-частиц испускает их во все стороны равномерно. На расстоянии 10 см от источника расположили фотопластинку размером 20×20 см и за 10 секунд экспозиции на ней оказалось 200 следов от попавших частиц. Сколько всего частиц испускает источник за час?

Точка, в которой находится источник, расположена очень удачно: она находится в центре куба, одной из граней которого является фотопластинка. Это означает, что за 10 секунд источник испустил $6\cdot 200 = 1200$ частиц. Тогда за один час он испустит

$$N = 1200\cdot 3600/10 = 432\,000 \text{ частиц.}$$

Однако этот ответ не вполне точен. Дело в том, что при радиоактивном распаде частицы испускаются хаотически, так что наш ответ носит оценочный характер. Подумайте сами, насколько хорошим было бы это решение, если бы в условии фигурировало число, существенно меньшее 200, например 10.

В. Волков

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1231 — М1245, Ф1238 — Ф1252, справились с задачами М1231, М1236, М1241 — М1245. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Андриенко (Киев) **32, 33, 37, 38;** *Д. Антипов* (Киев) **37;** *К. Ахмадалиев* (Янгиабад) **33;** *А. Ахмедов* (Баку) **33, 38;** *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) **32, 33;** *В. Беляев* (Тихвин) **37;** *Е. Беркович* (Киев) **33, 37;** *А. Бородин* (Донецк) **32, 33, 37;** *В. Бринюк* (Донецк) **33, 34, 37, 39, 40;** *С. Васильkeвич* (Киев) **33, 37;** *К. Волченко* (Донецк) **32, 33, 37, 38;** *С. Гетун* (Киев) **33, 34, 37, 38, 39;** *С. Голубчик* (Харьков) **32;** *А. Гордиященко* (п. М. Рогань Харьковской обл.) **33, 37;** *Д. Жалковский* (Донецк) **32, 33, 37, 38;** *А. Жеглов* (Москва) **33, 37, 38, 39;** *А. Зингер* (Москва) **33, 37;** *М. Иванов* (Тула) **33, 34, 37, 38;** *М. Иванов* (Харьков) **33, 34;** *И. Изместьев* (пгт Суна Кировской обл.) **32, 33, 34, 37, 38, 39, 40;** *Т. Калита* (Киев) **37;** *Г. Каминский* (Киев) **33;** *Р. Касымов* (Ангрен) **32, 33;** *И. Кацман* (Киев) **33, 37;** *С. Коваценко* (Винница) **32, 33, 34, 38;** *П. Кожевников* (Калуга) **33, 37;** *А. Козачко* (Винница) **32, 33, 34, 37, 38;** *С. Корсак* (п. Суворово, БССР) **34;** *А. Кудрявцева* (Киев) **33, 34, 37;** *М. Лейчкис* (Киев) **37;** *А. Лопушанский* (Львов) **33;** *А. Львов* (Москва) **32, 33, 34, 38, 39;** *К. Мильштейн* (Киев) **33, 34, 37, 38;** *К. Мишачев* (Липецк) **32, 33, 34, 37, 38;** *А. Насыров* (Обнинск) **37, 38;** *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) **32, 37, 39;** *Н. Немировская* (Киев) **33, 37;** *А. Ноаров* (Москва) **37;** *Д. Номировский* (Черкассы) **37, 38;** *Т. Панов* (Киев) **33, 34, 37, 38, 39;** *Е. Перельман* (Ленинград) **34, 38;** *А. Петросян* (Ереван) **37;** *Э. Пикялите* (Вильнюс) **37;** *А. Разин* (Одесса) **33, 34, 37, 38;** *Д. Рекалов* (Киев) **38, 39;** *В. Рычков* (Куйбышев) **38;** *А. Сафронов* (Томск) **37, 38;** *Г. Сироткин* (Харьков) **33;** *М. Славкин* (Минск) **37, 38;** *В. Сластиков* (Киев) **33, 37;** *А. Солодов* (Воронеж) **32, 33, 37;** *А. Солодушкин* (Томск) **37, 38;** *М. Темкин* (Москва) **37, 38, 40;** *А. Титаренко* (Видное) **32, 33, 34, 37, 38, 39;** *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **33, 37, 38, 39;** *Д. Филевич* (с. Яструбичи Львовской обл.) **33, 38;** *М. Хасин* (Донецк) **32, 33, 37, 38;** *Д. Хорошун* (Макеевка) **37;** *А. Шиндлер* (Феодосия) **32, 33, 34, 37, 38;** *О. Шпырко* (Киев) **37.**

Физика

А. Абдримов (Шават) **45, 50;** *М. Абдуллаев* (Баку) **38, 44—46;** *Е. Алабердин* (Ташкент) **48, 51;** *С. Атанасян* (Ленинград) **38, 43, 48, 50;** *С. Ахметзянова* (Белорецк) **48;** *Я. Бабкин* (Киев) **38, 40, 41, 44, 45, 47, 48, 50—52;** *С. Базылько* (Северодвинск) **47—49;** *Е. Балдин* (Новосибирск) **44;** *Н. Балюнас* (Вильнюс) **39—45, 47, 48, 50—52;** *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) **39—41, 44, 45, 47, 48, 50, 51;** *М. Бачинский* (Киев) **38, 39;** *Д. Белобрагин* (Тула) **48—51;** *М. Беломытцев* (Москва) **48, 52;** *В. Бондаренко* (Кузнецовск) **43, 47;** *С. Борисов* (Ухта) **48, 50;** *Л. Васильев* (Салават) **41, 44, 48—51;** *Г. Вейтас* (Вильнюс)

39—45, 47, 48, 50—52; *В. Волков* (Москва) 40; *П. Волынец* (Брест) 43—45, 48, 50; *А. Воронин* (Старый Оскол) 43, 45, 46, 50, 52; *И. Воскобойник* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *А. Габараев* (Цхинвали) 43; *А. Гадисов* (Баку) 39; *А. Гвозденко* (Нежин) 41; *В. Глазков* (Коломна) 44, 45, 48, 52; *А. Гледзер* (Одинцово) 50; *А. Гордняшенко* (п. Малая Рогань Харьковской обл.) 39; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 39—45, 47—50, 52; *В. Гребенников* (Оренбург) 49, 51; *Т. Григорян* (Ереван) 48, 50; *Ю. Гройман* (Ташкент) 48, 50; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 38, 40—52; *О. Гусар* (Канев) 44, 45, 50; *А. Гушанов* (Елабуга) 48, 52; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 38, 39, 41—46; *Ю. Дацюк* (Дубляны) 39, 41, 49—51; *А. Деев* (Тула) 43, 45—52; *А. Дементьев* (Чебоксары) 39—42, 44—46, 48—52; *И. Денисов* (д. Осиновка Могилевской обл.) 39—41, 44, 45, 47; *С. Джосюк* (Винница) 38—52; *С. Дибров* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 39—45, 48—52; *А. Дубовик* (Брест) 38, 40, 41, 44—51; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 45; *А. Душамов* (Шават) 44, 45, 50; *О. Дымар* (Каменец) 48; *М. Дьяк* (Владимир) 38, 41, 43, 45, 49, 50, 52; *М. Егоров* (Старый Оскол) 43; *П. Енин* (Воронеж) 38, 41; *А. Ермошко* (Орша) 50; *Н. Ефремов* (Свердловск) 41, 45, 48, 50; *А. Ечкало* (Запорожье) 48, 50, 51; *А. Жуков* (Воронеж) 38; *В. Жукова* (Кузнецовск) 44; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 38, 41, 43, 45, 48, 50; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 38; *А. Зайцев* (Железногорск) 38—41, 45, 46, 48, 49, 51, 52; *И. Зозуля* (Одесса) 44, 50, 52; *М. А. Иванов* (Тула) 38—41, 43—45, 47—52; *М. Г. Иванов* (Тула) 38—49, 51, 52; *Н. Ивченко* (Киев) 38—41, 43—52; *Т. Калита* (Киев) 44, 48, 50—52; *К. Калюжный* (Одесса) 38—42, 44, 45, 50—52; *В. Каменский* (Ташкент) 50; *И. Кацман* (Киев) 38, 41, 44—46, 48, 50—52; *А. Каширин* (Старый Оскол) 41; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 39—50, 52; *М. Коваленко* (Симферополь) 50; *Б. Ковтуненко* (Запорожье) 38—41, 43—46, 48, 50—52; *В. Козлов* (Старый Оскол) 39, 41, 43, 45, 46, 48, 50; *Т. Колесникова* (Вишневое) 48, 50; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 39—42, 44—46, 48, 50—52; *В. Кордюк* (Киев) 38; *П. Корешков* (Черкассы) 48, 50; *Д. Коротков* (Астрахань) 52; *А. Кравец* (Кузнецовск) 44; *А. Крампульс* (Тула) 48—51; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 39, 40, 48, 50—52; *Д. Кример* (Брест) 43, 48, 50; *А. Кузнецов* (Жуковский) 43; *Ю. Кузьма* (Протва) 43, 47, 48, 50, 51; *С. Кузьменко* (Киев) 38, 40, 41, 44—46, 48, 50—52; *П. Куприн* (Северодвинск) 45, 47, 50, 52; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 38, 41, 43, 47; *В. Легостаев* (Кустанай) 39, 41, 43, 52; *Д. Логинов* (Тула) 38—42, 44, 45, 47—52; *Д. Лунев* (п. Черноголовка Московской обл.) 48—52; *А. Макаренко* (Мариуполь) 39, 41, 43, 46—48, 50; *В. Макаров* (Кировское) 40, 41, 43—45, 48, 50; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 44; *Ю. Маравин* (Евпатория) 38, 40, 41, 43, 45, 46, 48, 52; *М. Махмудов* (Исфара) 40, 41, 44, 45, 47, 48, 50; *Р. Машковский* (Киев) 38; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 43, 45, 46, 48, 50, 52; *А. Мимеев* (п. Владимир-30 Владимирской обл.) 45; *В. Мирошниченко* (Пенза) 38—41; *Д. Моисеев* (Мытищи) 50; *С. Мохов* (Одесса) 38, 40, 41; *И. Мошкин* (Караганда) 50; *С. Мурин* (Брест) 38, 40—47, 50, 51; *Ю. Мусатенко* (Киев) 43, 45, 47, 50—52; *М. Мыктыбаев* (Алма-Ата) 39, 41; *А. Нежуренко* (Киев) 38—41, 43—45, 48—52; *М. Немировский* (Одесса) 44, 45, 48; *О. Никипорец* (Алма-Ата) 39—41, 49, 52; *И. Николаенко* (Армавир) 39—41, 44, 45, 48, 50—52; *Д. Номировский* (Черкассы) 45, 50; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 39—52; *В. Оганесян* (Ростов-на-Дону) 39, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 51, 52; *А. Ольховец* (Киев) 38; *Д. Островский* (Ленинград) 41, 48, 50; *Ю. Пайвин* (Харьков) 41, 50; *Д. Пастухов* (Витебск) 38—42, 44—48, 50—52; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 43—46; *И. Петров* (София, Болгария) 48, 52; *К. Петухов* (Старый Оскол) 38, 41, 43, 45, 46; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 43, 45, 46, 50; *И. Полищук* (Москва) 38—42; *А. Полунин* (Москва) 41; *С. Польшин* (Харьков) 38—46, 51; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 40, 41, 44—46, 48—50, 52; *В. Попов* (Жуковский) 40, 41, 43; *Д. Потишко* (Харьков) 41, 42, 48, 50; *Р. Протасов* (Владивосток) 48, 50; *М. Пузиков* (Мариуполь) 48, 52; *Ю. Радченко* (Волжский) 43, 52; *У. Рахимов* (Шават) 44—46, 50; *В. Репин* (Невинномысск) 41, 45, 50; *Ш. Рзаев* (Баку) 50; *А. Ручьев* (Северодвинск) 38—41, 43, 45, 46, 48—51; *В. Рыбачук* (Винница) 38, 39, 41, 43—45, 48—51; *У. Сапаев* (к-з Чапаев Хорезмской обл.) 50; *В. Сергиенко* (Брест) 38; *Д. Скотников* (Владимир) 43—46, 48, 49, 52; *А. Смирнов* (Москва) 48; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 44; *А. Снежко* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *А. Соклаков* (Брест) 48, 50; *Д. Сорокин* (Тула) 39—41, 50, 51; *А. Столповская* (Днепрорудный) 38, 43, 48; *Д. Супрун* (Минск) 40, 41, 45, 48, 50, 51; *С. Суслов* (Северодвинск) 49—51; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 38—41, 43—48, 50, 51; *А. Таратин* (Северодвинск) 45; *С. Телков* (Старый Оскол) 45, 50; *Д. Тимофеев* (Константиновка) 39, 45, 48; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 41, 48; *В. Толкачев* (Выборг) 38, 41; *М. Томилко* (Брест) 38, 40—47, 50, 51; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 38—41, 43—46, 48—51; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 38—52; *В. Тыртычко* (Кустанай) 39, 41, 43, 52; *А. Федоренко* (Омск) 39, 44; *К. Фотев* (София, Болгария) 43—46, 48, 50—52; *Д. Хаимов* (Баку) 45; *О. Харыбин* (с. Стрелецкое Белгородской обл.) 41; *А. Хмелев* (Свердловск) 38, 43, 48; *Р. Храбров* (Северодвинск) 38—52; *Ц. Чешков* (София, Болгария) 49, 50, 52; *А. Чистый* (Брест) 38, 40—48, 50, 51; *Е. Шагаров* (Грозный) 38, 40, 41, 43—47; *Г. Шаповалов* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *Д. Шаповалов* (Волгоград) 43, 45, 48, 50—52; *С. Шаракин* (Москва) 38—46, 48—51; *А. Шпагин* (Мариуполь) 39, 41, 43, 47, 49, 50, 52; *О. Шпырко* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *Н. Шраер* (Винница) 48, 52; *И. Шуляк* (Киев) 43—46; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 39—48, 50—52; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 39—45, 47—50; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 39—45, 47, 49, 50.

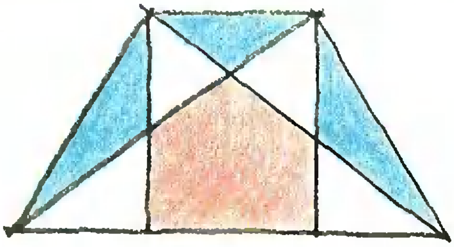
Задачи

1. Четыре кота — Васька, Пушок, Базилио и Леопольд — охотились на мышей. Пушок с Леопольдом поймали вместе столько же мышей, сколько Базилио с Васькой. Васька поймал мышей больше, чем Базилио, но Васька с Леопольдом поймали мышей меньше, чем Пушок с Базилио. Сколько мышей поймал каждый кот, если Пушок поймал 3 мыши?

2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

```
  КВАНТ
+ КВАНТ
-------
  НАУКА
```

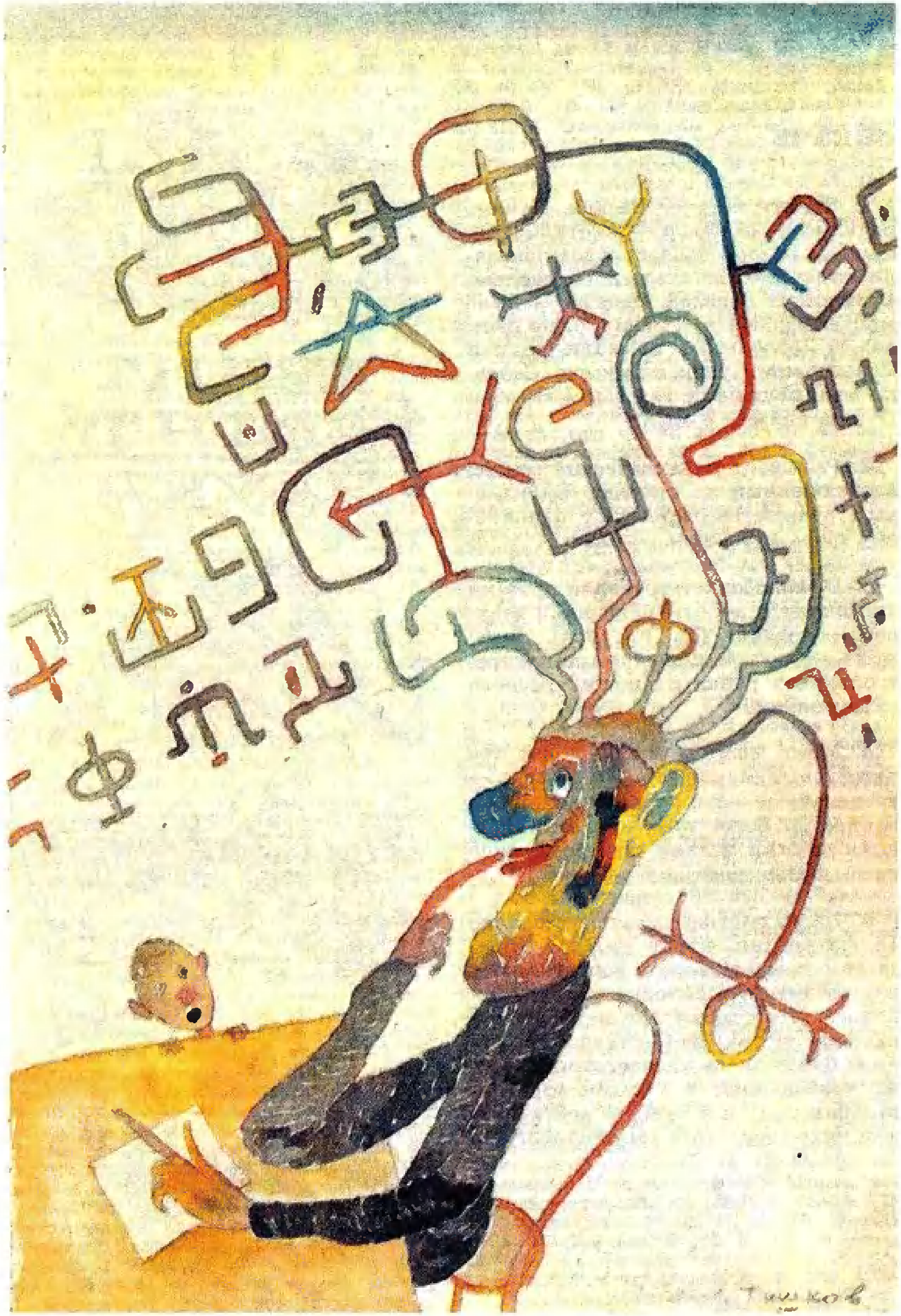
3. В равнобочной трапеции провели диагонали и высоты из вершин верхнего основания (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей синих треугольников равна площади красного пятиугольника.



4. Мимо моего дома проходят три автобусных маршрута. Их номера — трехзначные числа, причем все они — квадраты. Более того, они записываются одними и теми же тремя цифрами. Какие номера у автобусов?

5. На шахматной доске расставлено 15 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура. Докажите, что с доски можно убрать одну фигуру так, что оставшиеся фигуры будут вновь удовлетворять тому же требованию: в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура.

Эти задачи нам предложили С. Ляшенко, А. Алексеев, И. Нагель, А. Джафаров и В. Произволов.



Одной из первых популярных книг на русском языке был трехтомник Е. И. Игнатьева «В мире смекалки, или Арифметика для всех», впервые изданный в 1908 году и затем неоднократно переиздававшийся. Многие задачи из этой книги получили широкую известность, войдя в другие более поздние популярные книги. Недавно издательство «Наука» переиздало эту книгу в сокращенном варианте, собрав в ней, в основном, задачи (Игнатьев Е. И. В мире смекалки. М.: Наука, 1987 г.).

Здесь мы публикуем рассказ, не вошедший в это переиздание, который, как мы надеемся, будет интересен современному читателю.

О ШИФРАХ

Е. ИГНАТЬЕВ

Потребность в таком способе записи, который скрывал бы смысл написанного от постороннего глаза и делал бы его доступным лишь для немногих посвященных, существует у людей с древних пор. Отсюда и возникло искусство секретного письма, разросшееся в наши дни чуть ли не до размеров целой науки — *криптографии*. О тайнописи упоминает еще Геродот и даже приводит образцы таких писем, которые понятны лишь адресату. По свидетельству Плутарха, у спартанцев были в употреблении специальные механические приборы для записывания и прочтения тайных посланий. Для записывания религиозных тайн жрецы пользовались особыми письменами, непонятными для непосвященных.

У Юлия Цезаря была своя система тайнописи, при помощи которой он записывал свои тайны; она была основана на замене одних букв другими — прием употребительный и в наше время.

В средние века над изобретением и усовершенствованием криптографических систем работали многие выдающиеся умы — как, например, философ Бэкон Веруламский, математик Виет, историк Гуго Гроций и другие.

Но высшего своего развития криптография достигла лишь в новое время, с развитием дипломатических сношений и сложных торговых оборотов, требующих соблюдения строжайшей тайны. В наши дни ежедневно по всему миру циркулируют сотни и тысячи так называемых шифрованных, т. е. тайнописных, телеграмм. Важнейшие административные меры во всех почти странах передаются шифрованными телеграммами. Точно так же шифруется и бóльшая часть военных депеш. В Германии каждый офицер должен знать криптографию. Мы не говорим уже о дипломатах, которым «язык дан для того, чтобы скрывать свои мысли»: они не останавливаются ни перед какими затратами денег и времени, чтобы, полно и точно передавая депешу по назначению, сохранить в то же время и строжайшую тайну. Тайнопись находит себе обширное применение и в торговом мире, при разного рода биржевых и т. п. спекуляциях. Корреспонденты больших заграничных газет, желая, чтобы ни одна газета не упредила их орган в опубликовании какого-нибудь сенсационного известия, также шифруют свои телеграммы.

В дальнейшем мы познакомим с некоторыми приемами тайнописи. Читатель сам сможет рассудить, насколько много в криптографии «математики». Но если математике, собственно говоря, принадлежит здесь довольно скромная роль, то во всяком случае легко убедиться, что свободное пользование тайнописью требует все же запаса сообразительности и остроумия — словом, в обширном царстве смекалки и этому отделу должно быть уделено известное внимание.

Казалось бы, самой простой системой тайнописи была бы простая замена общепринятых букв какими-нибудь условными знаками или числами. Но это, как оказывается, далеко не надежная тайнопись, и при известном навыке очень легко доискаться до истинного смысла подобной криптограммы.

Пусть, например, в наши руки попала следующая криптограмма, написанная по способу простой замены букв какими-нибудь числами (так что одинаковые буквы заменялись одинаковыми же числами). Отдельные слова разделены тире, а буквы — запятыми.

1,2,3 — 2,3 — 5,6,7,8,5,9 — 2,3,8 — 11,12,2,9.
13,5,14,15,16 — 1,17,18,19 — 7 — 5,11,2 — 15,11,19,16,20,2,21,22.
23,11,15 — 20,18,5,11,13 — 24,7,25,26 —11,15,2,11,27,13,16,20,2,21,22.
17,18,27,15,18,3,8,5,9 — 28,24,7,27 — 1,3,2,9.

С самого начала видно, что перед нами стихи,— тождество концов строк обличает рифмы.

Вот один из многих возможных путей дешифровки заданной криптограммы.

Обращаем внимание на второе слово первой строки 2,3. Слово, состоящее из двух букв, может быть *бы, ли, не, на,...*

Сопоставляя первые два слова криптограммы

1,2,3 — 2,3

и принимая во внимание, что в последнем слове четвертой строки (1,3,2,9) цифры и 1 и 3 стоят рядом (следовательно если 3 — гласная, то 1 скорее всего согласная), убеждаемся рядом проб, что слова

1,2,3 — 2,3

суть: — *мне не*.

Подставив во всех словах вместо 1, 2 и 3, буквы *м, н, е*, обращаем внимание на четвертое слово первой строки 2,3,8=*не* 8. Очевидно, перед нами слово *нет*.

Точно так же выясняется, что последнее слово четвертой строки 1,3,2,9=*мен* 9=*меня*.

Сделав подстановку, обращаем внимание на первое слово четвертой строки:

17,18,27,15,18, *е, т*, 5, *я*.

Подозреваем глагольную рифму *тся*. Испытывая 5=*с*, убеждаемся, что третье слово первой строки: *с*, 6, 7, *тся* и четвертое второй строки: *с*, 11, *н*,— суть: *спится* и *сон*.

(Слово *сын* отвергаем, ибо число 11, как стоящее в начале последнего слова первой строки, не может быть *ы*.)

Подставив найденные буквы в остальные слова криптограммы, поступают далее по тому же методу, т. е. обращают прежде всего внимание на те слова, в которых либо больше всего известных букв, либо получается характерное их размещение. При этом, уловив размер стиха, можно пользоваться правилами стихосложения, угадывая число слогов в слове (а следовательно, и гласных букв). Не следует пренебрегать и указаниями, которые дает рифма.

В результате всех поисков, проб, подстановок и т. п. получаем следующее четверостишие (А. С. Пушкина):

Мне не спится, нет огня,
Всюду мрак и сон докучный;
Ход часов лишь однозвучный
Раздается близ меня.

В общем весь ход дешифровки сходен до известной степени с методом решения неопределенного уравнения рядом испытаний.

Между прочим, как известно, древне-египетские иероглифы были «дешифрованы» именно таким путем.

Самая остроумная система этой категории тайнописи — употребление так называемого *квадратного* шифра. Суть его в следующем. Буквы алфавита располагают в вертикальные и горизонтальные ряды, как показано в прилагаемой схеме:

а б в г д е ж з . . . . э ю я ф
а б в г д е ж з и . . . . ю я ф а
б в г д е ж з и к . . . . я ф а б
в г д е ж з и к . . . . . ф а б в
. . . .
. . . .
. . . .

и т. д. до конца алфавита.

Условный ключ — слово «пушка». Чтобы зашифровать по этому способу фразу «Главнокомандующий прибудет в семь вечера», производим следующие манипуляции. Пишем буквы нашего ключа над буквами депеши:

пушка пушка пушка пушка
главн окома ндующ ийпри
пушка пушка пушка п.
будет всемь вечер а.

Каждая буква нашей депеши вместе с соответствующей буквой ключа послужат нам теперь координатами для избрания букв вышеприведенной таблицы. В вертикальной колонке *г* и горизонтальном ряду *п* найдем букву *у*. Это и будет первая буква шифрованного текста. Далее на пересечении колонки *л* и ряда *у* находим *я* — это вторая буква и т. д. Слово «главнокомандующий» изобразится при этом так:

у я щ н о ю ю ж ш б э ш к и ъ щ э.

Легко усмотреть на этом примере одно серьезное преимущество квадратного шифра: в нем одна и та же буква может обозначать разные буквы. Это создает неимоверные трудности для всякого, кто пожелал бы разгадать смысл депеши, не зная ключа. А между тем адресат, имеющий ключ («пушка»), без больших хлопот прочтет эту тарабарщину. Стоит ему лишь написать ключ над текстом:

пушкапушкапушкапу
уящноюожшбэшкиъщэ

и затем при разыскании истинных букв задаваться каждый раз вопросом: какая буква помещена в первом ряду таблицы над такой-то буквой такого-то ряда? Например, для разыскания первой буквы спрашиваем: что стоит над *у* в горизонтальном ряду *п*? Оказывается *г*, и т. д., пока не получим в результате все слово «главнокомандующий».

Словари для шифрования

Как ни остроумна система квадратного шифра, как ни затрудняет она чтение криптограммы непосвященным, все же дипломаты не считают ее достаточно надежной. В самом деле, допустим, что любопытствующий член дипломатического корпуса соседней державы раздобылся текстом шифровального послания и каким-либо путем раскрыл смысл одного лишь слова,— например, в вышеприведенной телеграмме ему посчастливилось заподозрить в первой длинной группе букв слово «главнокомандующий»,— уже этого ему достаточно, чтобы рядом проб и испытаний добраться до ключа — и, следовательно, дешифровать все послание.

Вот почему в дипломатических сферах употребляются совершенно иные способы тайнописи — именно так называемая система *словарей*.

Словари для шифрования бывают двух родов: численные и буквенные. В первом случае каждая группа цифр, во втором — группа букв обозначает какое-нибудь слово. Пользуясь таким словарем, отправитель пишет послание на этом условном языке, а получатель при помощи словаря же переводит его снова на общеупотребительный язык.

Само собой разумеется, что в дипломатическом корпусе каждой страны есть свой словарь, который держится в строжайшей тайне и экземпляры которого выдаются немногим, вполне надежным и непосредственно заинтересованным лицам. Случайная утрата словаря в таких случаях может иногда повлечь за собой серьезные последствия, так как послание останется непрочитанным.

Калейдоскоп „Кванта"

...квант действия должен был играть в физике фундаментальную роль,... появление его возвещало нечто совершенно новое, дотоле неслыханное, что, казалось, требовало преобразования самых основ нашего физического мышления...

Макс Планк

Энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком.

Альберт Эйнштейн

А так ли хорошо знаком вам

квант ?

Непривычно спрашивать об этом со страниц одноименного журнала. Однако этот физический персонаж, ровесник XX века, произвел такую революцию в умах, заставил пересмотреть уже, казалось бы, такие незыблемые представления, что до сих пор многим, впервые сталкивающимся с квантовой природой света, трудно смириться с новыми диковинными понятиями. Эту непростую «эволюцию сознания» пришлось пройти в начале века выдающимся ученым, а гипотеза квантов-фотонов собрала под свои знамена блестящее созвездие имен. Объясняя различные эффекты, обрастая экспериментальными подтверждениями и новыми идеями, корпускулярная гипотеза превратилась в квантовую теорию света. Так физика вновь включила в себя концепцию, предложенную Ньютоном за 200 лет до этого. Окончательную же победу эта теория одержала в конце двадцатых годов после создания квантовой механики и объединения с волновой теорией света.

Приглашаем и вас поразмышлять о необыкновенных — и квантовых, и волновых — свойствах света, да и не только его.

Вопросы и задачи

1. Во что преобразуется при фотоэффекте энергия падающего на вещество света?

2. Освещают две электрически нейтральные пластинки, одну — металлическую, другую — из полупроводника. Останутся ли пластинки нейтральными при возникновении фотоэффекта?

3. Где — на фотобумаге или на фотопленке — химические процессы могут вызываться фотонами меньшей энергии?

4. Можно ли фотографировать в совершенной темноте?

5. Отличаются ли давления света, производимые на идеально белую и идеально черную поверхности?

6. Можно ли светом удерживать грузы?

7. Если комета видна на небе с вечера, то в какую сторону направлен ее хвост?

8. При аннигиляции позитрона с электроном образуются два γ-кванта. В каком случае энергии этих квантов будут равны и они станут двигаться в противоположных направлениях?

9. Может ли фотон, обладающий достаточной энергией, превратиться в электрон-позитронную пару?

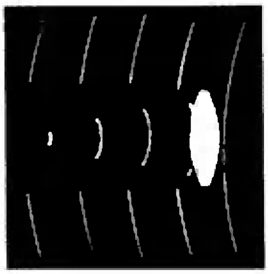
10. Способен ли свободный электрон поглотить квант света?

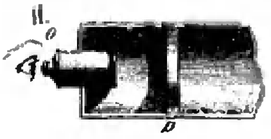
11. Исследуя монохроматический световой поток, можно узнать массу составляющих его фотонов. Какую характеристику света нужно для этого определить экспериментально?

12. Фотон и электрон обладают одинаковой кинетической энергией. Кто из них имеет бо́льшую длину волны?

Микроопыт

Закрепите на стержне электрометра цинковую пластинку. Можно ли зарядить ее положительно, не прикасаясь к ней?





Любопытно, что...

...фотон, пожалуй, единственная элементарная частица, для которой нельзя указать автора ее экспериментального открытия.

...А. Г. Столетову удалось, руководствуясь одной лишь физической интуицией, установить практически все законы фотоэффекта, когда не только не существовало гипотезы квантов, но и даже не был открыт электрон.

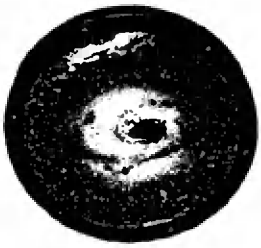
...основной закон фотоэффекта, сформулированный Эйнштейном, был окончательно подтвержден к 1916 году замечательными опытами Милликена, резко настроенного против теории Эйнштейна и не скрывавшего этого.

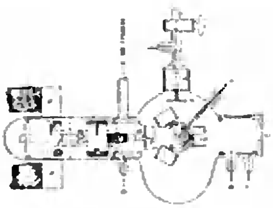
...за одну секунду на квадратный сантиметр земной поверхности падает огромное число «солнечных» фотонов — примерно $3 \cdot 10^{17}$. В то же время в опытах с элементарными частицами детекторы регистрируют фотоны поодиночке, и даже человеческий глаз в принципе способен на это.

...световое давление играет огромную роль в природе: оно, например, препятствует гравитационному сжатию звезд, решающим образом влияет на образование кометных хвостов, сокращает время жизни искусственных спутников Земли. Сегодня обсуждаются проекты межпланетных кораблей-парусников, приводимых в движение «солнечным ветром».

...Планк, будущий автор одной из наиболее революционных физических теорий, придерживался весьма консервативных научных воззрений. А Эйнштейн, автор гипотезы световых квантов, советуя (в 1925 году) ознакомиться с диссертацией де Бройля, выдвинувшего дикую по тем временам идею о том, что электроны обладают свойствами волн, сказал: «Прочтите ее! Хотя и кажется, что ее писал сумасшедший, написана она солидно».

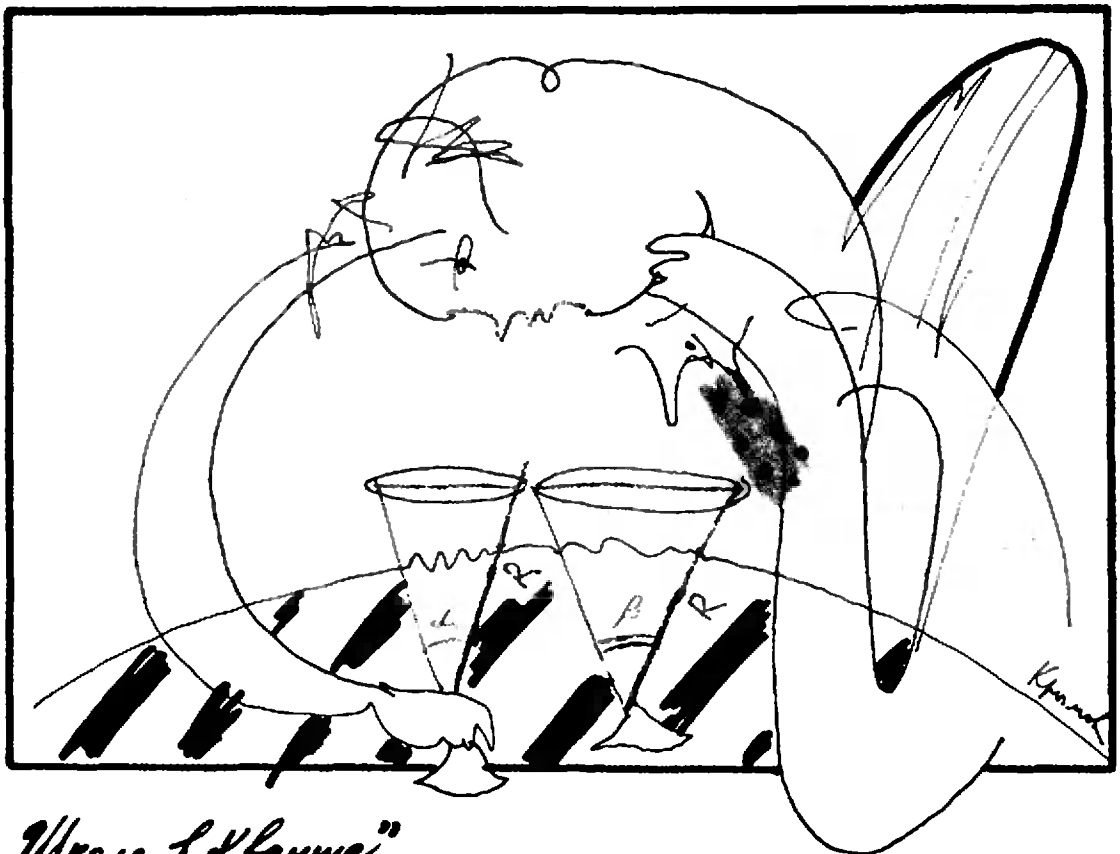
...мировое пространство заполнено миллиметровыми радиоволнами, которые можно рассматривать как холодный фотонный газ с плотностью около 500 штук в 1 см^3. По современным представлениям, это излучение (его называют реликтовым) возникло на ранних стадиях развития Вселенной, когда вещество находилось при огромных температуре и давлении.





Что читать в «Кванте» о квантах
(публикации последних лет)

1. «Фотоэлектрический эффект и кванты» — 1984, № 2, с. 29;
2. «Аннигиляция и рождение пар» — 1984, № 5, с. 35;
3. «Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна» — 1985, № 11, с. 26;
4. «Атомная физика в задачах» — 1986, № 12, с. 43;
5. «О столкновении шаров и «серьезной» физике» — 1987, № 1, с. 3;
6. «Давление света» — 1988, № 6, с. 19;
7. «Несколько замечаний по поводу фотоэффекта» — 1989, № 1, с. 49;
8. «Многоквантовые процессы» — 1989, № 5, с. 23;
9. «Космическая парусная регата» — 1989, № 11, с. 43;
10. «Охлаждение светом» — 1990, № 5, с. 11;
11. «Распределение Планка и реликтовое излучение» — 1990, № 8, с. 25.



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Публикуемая заметка адресована девятиклассникам.

Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения

Примерно 2000 лет тому назад при проведении астрономических наблюдений древние греки заметили, что длина хорды зависит от величины соответствующей ей дуги. Производя измерение длин хорд для разных центральных углов и вычисляя отношение их длины к радиусу, древнегреческий ученый Птолемей составил таблицу этих отношений. Это была одна из первых тригонометрических таблиц удвоенных синусов углов от 0° до 90°.

Птолемей вычислял хорду дополнительной (до 180°) дуги по хорде данной дуги (рис. 1), применяя теорему Пифагора. С современной точки зрения, это то же самое, как если бы он пользовался формулой $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, так как $AC = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\beta = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$, а $AB = 2R$. Так он составил таблицы удвоенных косинусов углов от 0° до 90°.

Птолемей умел также по хорде дополнительной дуги (т. е. по $2\cos\alpha$) находить хорду половинной дуги $\left(\text{т. е. } 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Его рассуждения строились на том, что $OD = \frac{1}{2}BC$ (OD — средняя линия $\triangle ABC$), тогда $OD = R\cos\alpha$, следовательно, $MD = R - R\cos\alpha$. В свою очередь, $AM =$

$=2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Используя метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, получаем $AM^2=MD\cdot MK$. С учетом того, что $MK=2R$, получаем $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=(R-R\cos\alpha)\cdot 2R$, или

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Сейчас мы эту формулу называем формулой понижения степени.

Еще одно большое достижение Птолемея заключается в том, что он доказал геометрическую теорему, которую теперь называют *теоремой Птолемея*.

Теорема. *Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон* (рис. 2).

Доказательство. Возьмем на диагонали AC точку M такую, что $\angle ABM=\angle CBD$. Поскольку $\angle CDB=\angle MAB$ как вписанные, треугольники BCD и ABM подобны. Поэтому $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AM}$, т. е.

$$AB\cdot CD=AM\cdot BD. \qquad (*)$$

Из того, что $\angle ABD=\angle MBC$ по построению, а $\angle BCM=\angle ADB$ как вписанные, следует, что $\triangle ABD \backsim \triangle MBC$. Значит, $\frac{AD}{CM}=\frac{BD}{BC}$ или

$$AD\cdot BC=BD\cdot CM. \qquad (**)$$

Сложив почленно равенства $(*)$ и $(**)$, получим

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD(AM+CM)=BD\cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

Используя теорему Птолемея, мы можем вывести некоторые тригонометрические формулы.

Впишем четырехугольник $ABCD$ в окружность таким образом, чтобы одна из его сторон являлась диаметром этой окружности (рис. 3).

Пусть $\angle AOC=2\alpha$, $\angle AOD=2\beta$, тогда $AC=2R\sin\alpha$, $AD=2R\sin\beta$, $BC=2R\cos\alpha$, $BD=2R\cos\beta$, $CD=2R\sin(\alpha-\beta)$.

Используя теорему Птолемея и учитывая, что $AB=2R$, получаем

$$2R\cdot 2R\sin(\alpha-\beta)+2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\beta=2R\sin\alpha\cdot 2R\cos\beta,$$

или

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу для вычисления $\sin(\alpha+\beta)$ выведите самостоятельно. (Указание. Впишите в окружность четырехугольник таким образом, чтобы его диагональ являлась диаметром.)

Итак, мы получили две важные тригонометрические формулы:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Сложим их почленно. Получим

$$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

или

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)). \qquad (1)$$

Почленно складывая и вычитая формулы для косинуса суммы (или разности) двух углов, можно получить еще две формулы:

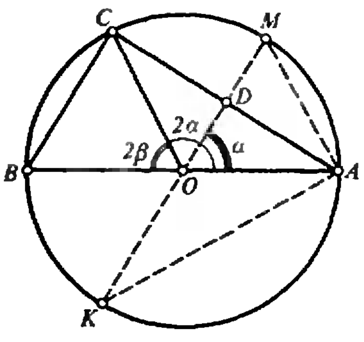


Рис. 1.

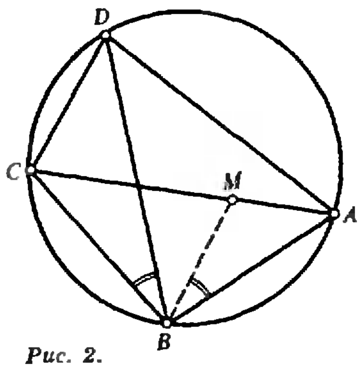


Рис. 2.

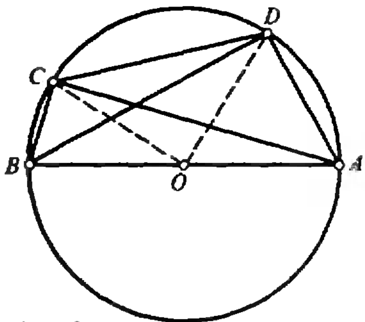


Рис. 3.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),\quad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).\quad (3)$$

В современной тригонометрии эти формулы называются формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Уже по названию этих формул чувствуется их связь с формулами преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Действительно, производя замену $\frac{x+y}{2}=\alpha$, $\frac{x-y}{2}=\beta$, например, в формуле $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, и выражая x и y через α и β, получим формулу (1). Аналогичным образом получаются формулы (2) и (3).

Формулы (1), (2), (3) являются весьма полезными при решении ряда тригонометрических примеров.

Пример 1. *Вычислите без помощи таблиц и калькулятора значение выражения* $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$.

Решение. $\frac{1-4\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}=1.$

Пример 2. *Вычислите без помощи таблиц и калькулятора значение выражения* $16\sin 20^\circ\ \sin 40^\circ\ \sin 60^\circ\times\sin 80^\circ$.

Решение. $16\sin 20^\circ\ \sin 40^\circ\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 80^\circ=4\sqrt{3}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\times\sin 80^\circ=4\sqrt{3}(\cos 20^\circ\sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ)=4\sqrt{3}(\frac{1}{2}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-\frac{1}{2}\sin 80^\circ)=$

$=2\sqrt{3}(\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 10^\circ)=3.$

Пример 3. *Решите уравнение* $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x=\sin 4x$.

Решение. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-2\sin 2x\cos 2x=0$, $2\sin 2x\times(2\sin 5x\sin 7x-\cos 2x)=0$, откуда

1) $\sin 2x=0\to x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$, или

2) $\cos 12x=0\to x=\frac{\pi}{24}(2n+1),\ n\in Z.$

Предлагаем вам несколько примеров для самостоятельного решения.

1. Вычислите без помощи таблиц и калькулятора значения выражений

а) $\frac{1}{2\cos 20^\circ}-2\sin 50^\circ$;

б) $\cos 10^\circ\sin 20^\circ\cos 50^\circ$;

в) $\mathrm{tg}\,20^\circ\,\mathrm{tg}\,40^\circ\,\mathrm{tg}\,60^\circ\,\mathrm{tg}\,80^\circ$.

2. Решите уравнения

а) $2\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x$;

б) $\sin 2x\sin x+\cos^2 x=\sin 5x\sin 4x+\cos^2 4x$;

в) $4\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin 4x$.

В. Затакавай

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 июня 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

22. В треугольнике ABC угол A равен 60°, прилегающие к нему стороны AB и AC равны 2 и 3. Разрежьте его на три куска так, чтобы из них можно было сложить правильный шестиугольник.

А. Швецов

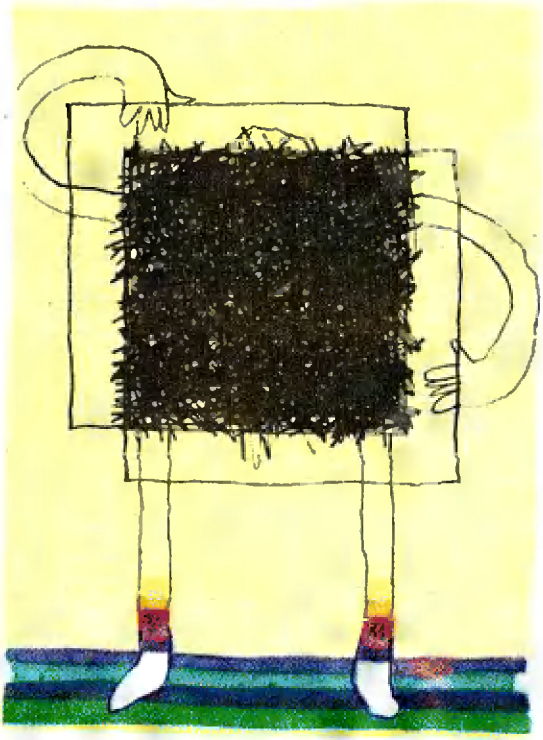
23. Факториалом числа n (обозначается $n!$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. (Например, $3!=1\cdot2\cdot3=6$, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$).

Найдите два семизначных числа такие, что их сумма, их разность и сумма цифр одного из них являются факториалами.

И. Акулич

24. У двух четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ стороны соответственно равны $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CD=C_1D_1$, $DA=D_1A_1$. Известно также, что в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, а в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ параллельны стороны B_1C_1 и D_1A_1. Докажите, что оба четырехугольника — параллелограммы.

В. Произволов



Лаборатория „Кванта"

Интерференция света... на письменном столе

Кандидат педагогических наук
Я. АМСТИСЛАВСКИЙ

Вот бесспорно самая странная из гипотез! Неожиданностью было видеть ночь среди ясного дня,... но кто бы мог подумать, что свет, слагаясь со светом, может вызвать мрак!

Д. Араго

Приведенные в эпиграфе слова написаны полтора с лишним столетия назад и относятся к изумившему ученый мир опыту Юнга и выдвинутой им идее интерференции света. Однако, несмотря на выдающиеся достижения интерференционной оптики последних десятилетий и широкое проникновение ее в современную практику, получение протяженной интерференционной картины от теплового (нелазерного) источника, тем более в виде красочной картины интерференционных полос в белом свете, в наши дни оказывается делом столь же непростым, как и на заре интерференционной эры. И если, тем не менее, опыт оказывается удачным, он, наряду с познавательным эффектом, приносит радость и удовлетворение.

К числу таких опытов можно по праву отнести опыт по интерференции в воздушной прослойке между двумя призмами, осуществленный впервые У. Гершелем еще в 1809 году. Рассмотрим вариант этого опыта, который позволяет в условиях домашней лаборатории наблюдать интересные и поучительные интерференционные явления. Схема опыта изображена на рисунке 1.

Пучок белого света от небольшой лампочки накаливания *Л* падает на прижатую к краю стола стеклянную призму, сечение которой представляет собой прямоугольный треугольник с углом 45°. Пусть для центрального луча угол падения на грань AD равен предельному углу полного внутреннего отражения $i_0 = \arcsin(1/n)$, где n — показатель преломления стекла. Часть *1* падающего пучка, для которой $i > i_0$, полностью отражается от AD, как от зеркала, и образует на экране *Э* ярко освещенную область $O'D'$. Часть же *2*, для которой $i < i_0$, испытывает на грани AD частичное отражение и частичное преломление,

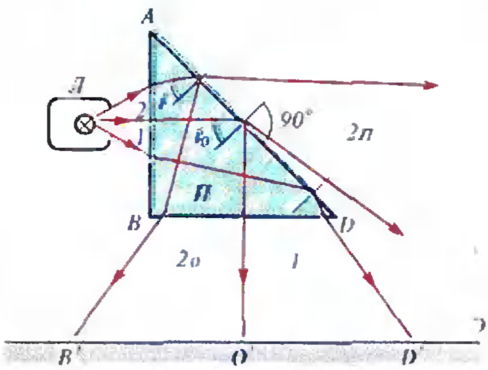


Рис. 1.

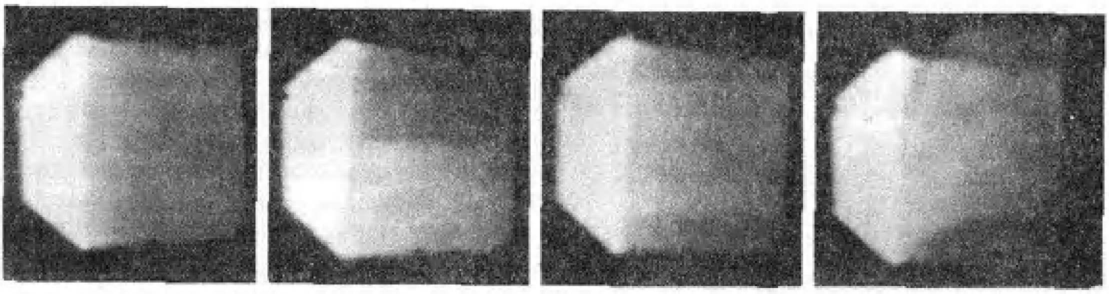


Рис. 2.

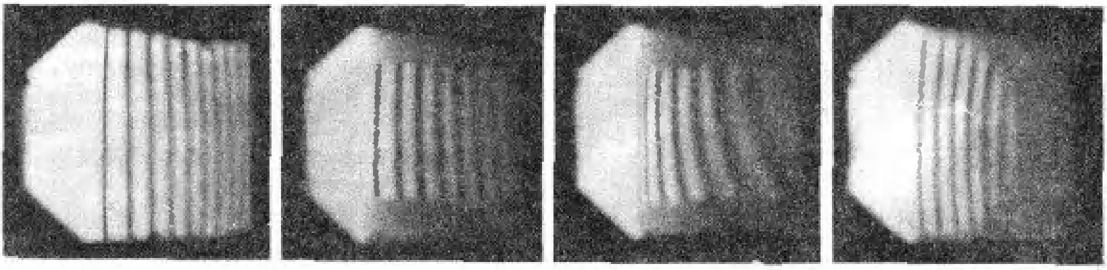


Рис. 3.

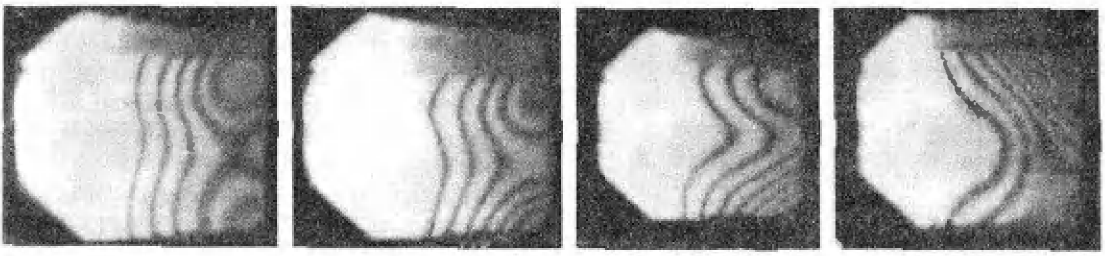


Рис. 4.

так что тоже делится, в свою очередь, на две части. Отраженная часть 2_0 образует на экране слабо освещенную (полутемную) область $B'O'$, смежную с областью $O'D'$, а преломленная часть образует пучок $2_п$, проходящий через грань AD.

Отразим пучок $2_п$ в направлении пучка $2_о$, используя в качестве отражателя стеклянную пластинку. Это может быть отмытая от эмульсии фотопластинка, или кусок оконного стекла, или черное стекло, или пластинка оптического стекла, или вторая призма, или еще что-нибудь. Поднесем отражатель к призме. Тогда в полутемной области $B'O'$ экрана произойдет наложение пучка $2_п$ на пучок $2_о$, и освещенность экрана заметно возрастет. В этом можно убедиться непосредственно, сместив отражатель вверх или вниз вдоль призмы, или используя отражатель меньшего, чем призма, размера, или наклонив отражатель, образовав прослойку в виде воздушного клина (рис. 2).

Убедившись в наличии перекрывающихся пучков, *снова прижмем отражатель к призме*. Однако никакой интерференционной картины пока не возникает. Может быть, слишком велика толщина воздушной прослойки? Попробуем *уменьшить* ее. С этой целью очистим соприкасающиеся грани от загрязнения и пыли, например, подышав на грани и затем тщательно протерев затуманенные поверхности *сухой чистой тряпочкой*. Снова приложим отражатель к призме и легкими круговыми движениями со слабым давлением будем притирать его к грани AD. Если соприкасающиеся *поверхности достаточно гладкие и* не имеют заметных дефектов, вы почувствуете легкое скольжение отражателя. Ощущение такое, будто между призмой и отражателем появился слой маловязкой жидкости. Обычно таким способом удается сократить толщину воздушной прослойки до нескольких микрон. Вот тут-то на экране в области перекрывания пучков и «разгораются» интерференционные спектры с узкой темной пограничной полосой. Изменяя местоположение сжимающего усилия, можно изменять конфигурацию и ширину полос, насыщенность их красками и т. п. На рисунках 3 и 4 представлены черно-белые фотографии картин такого рода, сделанные с экрана.

Как же все-таки получить такую картину в условиях домашней лаборатории? Оказывается, это можно сделать двумя способами. В первом, который по существу мы уже обсудили, призму накрывают треугольной накладкой из фанеры и прижимают к краю письменного стола струбцинкой так, чтобы гипотенузная грань призмы на несколько миллиметров выступала за край стола. Источником света может служить кинопроекционная лампа (например, лампа К-12-30 от детского фильмоскопа), а экраном наблюдения — наволочка, наброшенная на спинку стула. Картину наблюдают в отраженных лучах по схеме, изображенной на рисунке 5.

Во втором способе незакрепленный прибор просто кладут на письменный стол, и прослойку прибора рассматривают непосредственно глазом в рассеянном дневном свете в отраженных или проходящих лучах (соответственно схемам на рисунках 6,*б* и 6,*а*). Этот способ более прост и доступен, а также он дает возможность одновременного наблюдения и сопоставления картин в проходящем и отраженном свете. Его мы и обсудим более подробно.

На стол кладут листок белой писчей или ватманской бумаги *ББ*, на него накладывают два граненых карандаша, располагая их параллельно друг другу на расстоянии 4—5 см, покрывают эти «рельсы» отмытой от эмульсии фотопластинкой *Пл* размером 9×12 см, на пластинку ставят призму *П*, предварительно тщательно протерев соприкасающиеся поверхности, а обращенную к окну грань призмы покрывают накладкой *ЧН* из черной бумаги, вырезанной по размерам этой грани, с бортиком-отгибом шириной 2—3 см.

Для наблюдения картины в отраженных лучах надо белый фон заменить черным и наоборот: на стол кладут листок черной бумаги и непосредственно на него — стеклянную пластинку с поставленной на нее призмой. На обращенную к окну грань можно наложить полупрозрачную накладку *ПН*, например из папиросной бумаги.

Особый интерес представляет одновременное наблюдение и сопоставление обеих картин — и в проходящих, и в отраженных лучах. С этой целью используют расположение приборов по рисунку 6, *а*, но под стеклянную пластинку с одной ее стороны (поверх одного из карандашей) вводят лист черной бумаги примерно на полширины пластинки, а призму располагают так, чтобы половина ее гипотенузной грани находилась над черной подкладкой. При этом черная накладка на входную грань призмы должна прикрывать противоположную половину входной грани. Смещая подкладку или накладку, добиваются того, чтобы оба поля зрения — темное на

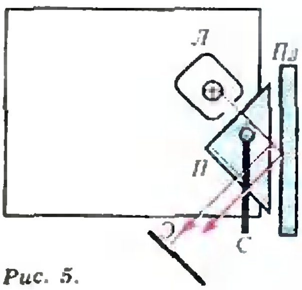


Рис. 5.

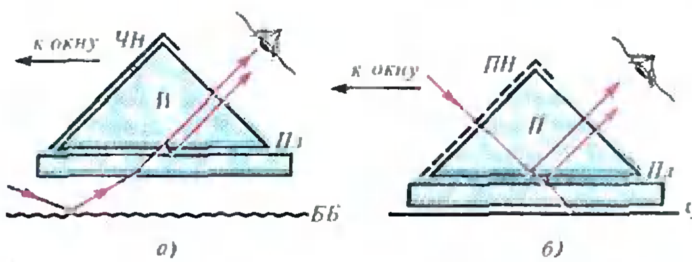


Рис. 6.

светлом фоне и светлое на темном фоне — располагались впритык.

Что же можно увидеть в прослойке под призмой? Оказывается, очень многое. Мы же вынуждены ограничиться описанием лишь одного наблюдения.

При сочетании призмы с простой стеклянной пластинкой (например, с отмытой от эмульсии фотопластинкой) прослойка имеет изменяющийся от места к месту рельеф, обусловленный не идеально плоской поверхностью пластинки. Этот рельеф и определяет ход интерференционных полос и их деформацию. Наблюдение можно проводить следующим образом: а) держа приграничную область неподвижной призмы в поле зрения и перемещая взор по высоте, переходить к новым и новым участкам прослойки; б) сдвигать призму по поверхности пластинки в том или ином направлении; в) надавливать на противоположные края или вершины пластинки; г) осторожно приподнимать призму со стороны наблюдателя и увеличивать толщину прослойки, образовывая воздушный клин; д) взять прибор для наблюдения интерференционной картины в отраженных лучах в руки и надавливать пальцем на стеклянную пластинку под призмой.

Опыт убеждает в том, что в случае достаточно плоской поверхности оптического стекла или хорошего светофильтра полосы имеют правильную форму (см. фотографии на рисунке 3). В случае менее качественной фотопластинки полосы искривлены, причем степень искривления можно менять, деформируя прослойку тем или иным способом (см. фотографии на рисунке 4).

Вслед за Бойлем и Ломоносовым...

И. КОЧУБЕЙ

Человек повернул кран, и воздух с резким полушипением-полусвистом устремился под колокол воздушного насоса. Вынув из-под колокола небольшую склянку, человек поставил ее на подоконник рядом с точно такой же и бросил что-то в обе. Через некоторое время в лабораторном журнале появилось описание этого опыта, которое начиналось словами: «Стеклянный сосудик, наполовину наполненный водою, я поместил под колокол воздушного насоса и несколько раз повторенными ходами поршня выкачивал воздух: из воды поднимались частые воздушные пузырьки...»

Эти слова мы теперь можем прочесть в известной диссертации М. В. Ломоносова «О действии химических растворителей вообще», написанной им в 1743 году. (Появление газовых пузырьков в жидкости при разрежении первым заметил, по-видимому, Р. Бойль (1627—1691).)

Давайте отложим на время это чтение и попробуем сами поэкспериментировать с жидкостью в условиях пониженного давления.

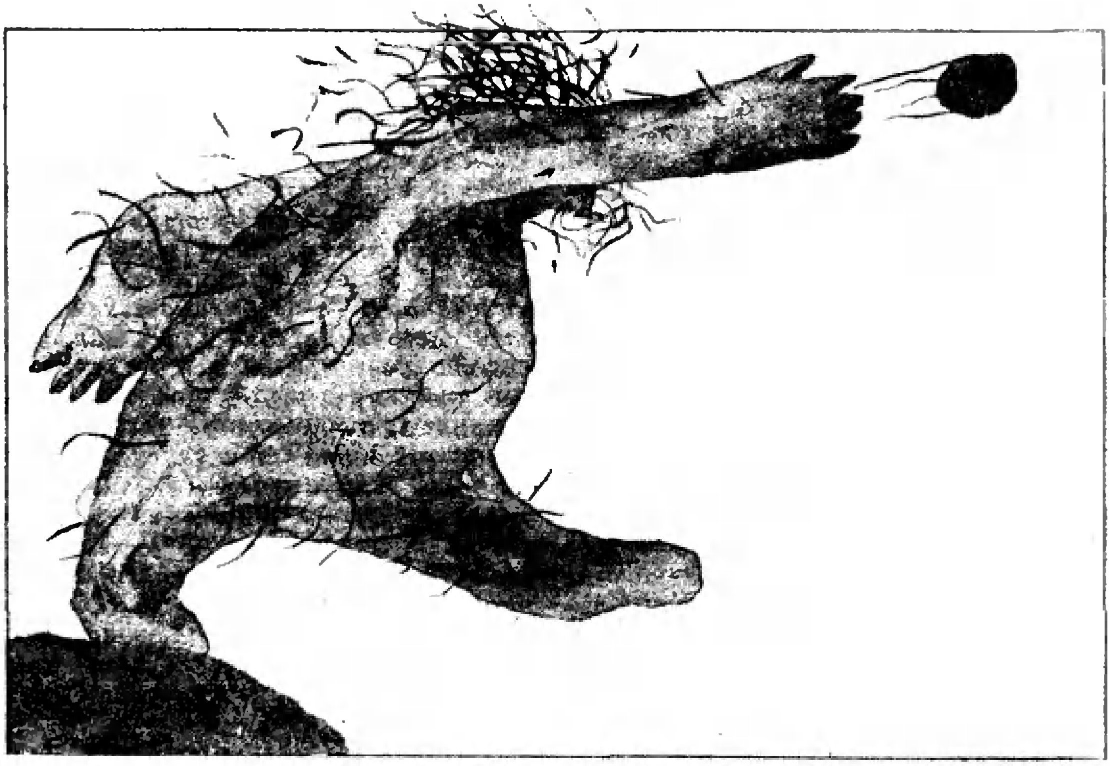
Возьмите маленькую пробирку (например, объемом 7 мл) с боковым отводом и налейте в нее гексан (C_6H_{14}). Отвод соедините трубкой с носиком шприца (объемом 100 мл) или какого-нибудь другого устройства, с помощью которого в пробирке можно будет получить разрежение. Опустите в гексан термометр (например, ртутный), вставленный в резиновую пробку, и, не закрывая отверстия пробирки, погрузите ее в только что кипевшую воду (нагреватель нужно выключить).

Разумеется, конструкция прибора может быть иной, важна идея.

Когда пробирка достаточно прогреется, гексан закипит и столбик термометра перестанет ползти вверх — а это должно случиться при температуре 68,7 °С,— быстро выньте пробирку из воды и плотно закройте ее пробкой. Кипение прекратится (температура довольно быстро понизится). Теперь с силой вытяните поршень шприца — гексан снова бурно вскипит. Возможно, вам удастся заметить, как образуются и растут пузырьки в объеме жидкости.

Почему в нашем опыте возникает кипение — понятно. Жидкость начинает кипеть тогда, когда давление ее насыщенного пара в пузырьках становится чуть-чуть больше давления в жидкости, которое складывается из внешнего (атмосферного) давления, гидростатического давления и давления под изогнутой поверхностью жидкости, обусловленного поверхностным натяжением. Поскольку два последних обычно существенно меньше первого, можно считать, что

(Окончание см. на с. 54)



Практикум абитуриента

Изменение механической энергии

Кандидат физико-математических наук
А. ЧЕРНОУЦАН

Механическая энергия системы тел может изменяться по двум причинам. Во-первых, к изменению энергии может привести наличие внешних сил (в том случае, разумеется, если работа этих сил не равна нулю). А, во-вторых, даже если внешние силы отсутствуют, т. е. система тел является замкнутой, ее механическая энергия может не сохраняться. Например, при действии внутри системы — между входящими в нее телами — сил трения, сопротивления и других так называемых диссипативных сил происходит переход части механической энергии во внутреннюю, тепловую энергию тел. Но сумма механической и внутренней энергии в случае замкнутой системы остается постоянной — это есть общий принцип сохранения энергии, выходящий далеко за рамки механики.

Примером процесса, в котором происходит уменьшение механической энергии под действием сил диссипативной природы, является неупругий удар. Пример противоположного рода — разрыв снаряда, при котором механическая энергия также не сохраняется, но не убывает, а возрастает. Дело здесь в том, что в результате химической реакции горения взрывчатого вещества большое количество внутренней химической энергии очень быстро переходит в механическую. Подобное происходит и при работе двигателя внутреннего сгорания. Такую же роль может сыграть и человек, когда он совершает работу за счет своих внутренних энергетических ресурсов (пример: вы поднимаете с земли камень и затем бросаете его).

Для полноты картины давайте вспомним, какие же силы «не угрожают» закону сохранения механической энергии, т. е. не приводят ни к потере, ни к производству этой энергии. Это хорошо известные вам силы: тяжести, упругости, кулоновского взаимодействия и другие так называемые консервативные силы, т. е. силы, работа которых по замкнутой траектории равна нулю. Соответственно, диссипативные силы, о которых шла речь выше, называют неконсервативными.

Полезно иметь в виду, что для любого консервативного взаимодействия можно определить соответствующую ему потенциальную энергию, а для неконсервативного это сделать невозможно. Значит, если для какого-то взаимодействия известна потенциальная энергия, то оно наверняка консервативное.

Все сказанное, конечно же, известно любому школьнику из учебника физики. Поэтому, увидев, что в условии задачи упоминается, к примеру, сила трения (или коэффициент трения), абитуриент зачастую отказывается от мысли использовать при решении задачи энергетические соображения. И он прав в том смысле, что неправильно было бы пытаться записать закон сохранения механической энергии. Но можно и нужно в таких случаях применять формулу для изменения механической энергии, которая связывает изменение механической энергии с работой сил, приводящих к этому:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{внешн}} + A^*_{\text{внутр}}. \qquad (*)$$

Здесь $A_{\text{внешн}}$ — работа внешних сил, а $A^*_{\text{внутр}}$ — работа внутренних неконсервативных сил (чаще всего — работа сил трения или сопротивления).

З а м е ч а н и е. Чтобы правильно использовать эту формулу, полезно опираться на следующее простое правило: в правой части надо учитывать работу всех сил, которые не учтены в выражении для потенциальной энергии системы. Например, если вам почему-то удобнее учесть силу тяжести в работе, стоящей в правой части уравнения (*), то выражение для энергии уже не должно содержать члена mgh.

А теперь — несколько конкретных задач.

З а д а ч а 1. *На горизонтальной плоскости лежит тело массой m, соединенное с вертикальной стеной легкой пружиной жесткостью k (рис. 1). В начальный момент пружина не деформирована. На тело начинает действовать постоянная сила F. Считая, что коэффициент трения между телом и плоскостью μ и что $F > \mu mg$, найдите максимальное смещение тела от начального положения и максимальную скорость тела в процессе движения.*

В этом случае изменение механической энергии системы — кинетической энергии тела $mv^2/2$ и потенциальной энергии упруго деформированной пружины $kx^2/2$ — происходит под действием внешней силы F и силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$:

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) - 0 = Fx - F_{\text{тр}}x$$

(начальная механическая энергия равна нулю). Максимальное смещение тела соответствует моменту, когда скорость тела обратится в ноль, поэтому получаем

$$x_{\max} = \frac{2}{k}(F - \mu mg).$$

Чтобы определить максимальную скорость тела, надо найти соответствующее этому моменту значение x. Заметим, что скорость тела будет макси-

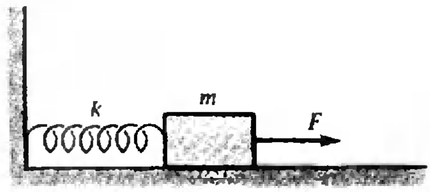


Рис. 1.

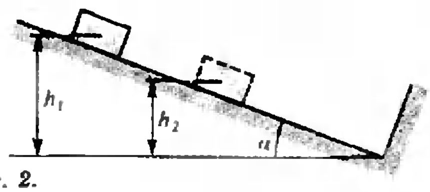


Рис. 2.

мальной в тот момент, когда ускорение станет равным нулю. Из второго закона Ньютона

$$F-\mu mg-kx=0$$

выражаем x и, подставляя в закон изменения механической энергии, находим

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{F-\mu mg}{k}.$$

Примечание. Если бы мы захотели определить также, какое количество энергии переходит из механической во внутреннюю, нам достаточно было бы вычислить работу силы трения и взять ее с противоположным знаком. Например, к моменту остановки тела выделится количество теплоты

$$Q=-A_{\text{тр}}=\mu mgx_{\max}.$$

Задача 2. *Маленькое тело кладут на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и отпускают (рис. 2). В нижней точке плоскости тело ударяется об упор, отскакивает без потери скорости и поднимается обратно по наклонной плоскости на некоторую высоту. Найдите эту высоту h_2, если начальная высота тела h_1, а коэффициент трения тела о плоскость μ ($\mu<\operatorname{tg}\alpha$).*

В отличие от предыдущего случая, здесь внешних сил нет (по отношению к системе «тело — Земля»), и изменение механической энергии происходит только под действием силы трения.

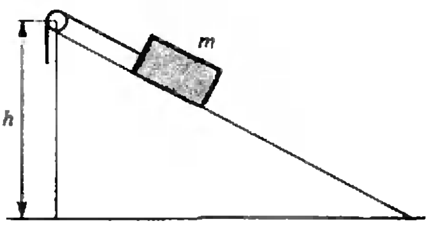


Рис. 3.

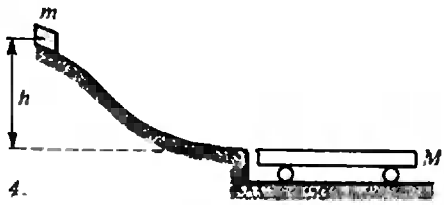


Рис. 4.

Работа силы трения вычисляется весьма просто, так как величина силы трения не зависит от того, в какую сторону движется тело: $F_{\text{тр}}=\mu N=\mu mg\cos\alpha$. Учитывая, что как в начальном, так и в конечном состоянии кинетическая энергия тела равна нулю, запишем уравнение (*) в виде

$$mgh_2-mgh_1=-\mu mg\cos\alpha\left(\frac{h_1}{\sin\alpha}+\frac{h_2}{\sin\alpha}\right),$$

где $h_1/\sin\alpha$ и $h_2/\sin\alpha$ — пути, пройденные телом вниз и вверх по наклонной плоскости, а знак «—» в правой части учитывает то, что работа силы трения отрицательна. Таким образом, получаем

$$h_2=h_1\frac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{\operatorname{tg}\alpha+\mu}.$$

Задача 3. *Груз массой m медленно поднимают на высоту h по наклонной плоскости с помощью блока и троса (рис. 3). При этом совершается работа A. Затем трос отпускают, и груз скользит вниз. Найдите величину A, если известно, что скорость тела в конце спуска равна v.*

Если в условии задачи речь сразу же идет о работе или энергии, то энергетический подход к решению может оказаться тем более выигрышным, что избавляет нас от необходимости выражать в явном виде те силы, о работе которых идет речь.

Запишем формулу (*) для изменения механической энергии сначала при подъеме груза:

$$mgh-0=A+A_{\text{тр}},$$

а потом при спуске:

$$\frac{mv^2}{2}-mgh=A_{\text{тр}}$$

(работа силы трения $A_{\text{тр}}$ одинакова при подъеме и при спуске). Из этих уравнений находим

$$A=2mgh-\frac{mv^2}{2}.$$

Задача 4. *Тело массой m съезжает с высоты h гладкой наклонной плоскости и начинает скользить по тележке массой M, находящейся на гладкой* *горизонтальной плоскости (рис. 4). Коэффициент трения тела о поверхность тележки μ. На какое расстояние переместится тело относительно тележки?*

В этой задаче закон изменения механической энергии системы мы применим совместно с законом сохранения импульса.

Скорость тела v_1 у основания наклонной плоскости найдем из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2}=mgh \Rightarrow v_1=\sqrt{2gh},$$

а конечную скорость совместного движения тела и тележки v_2 вычислим с помощью закона сохранения импульса:

$$mv_1=(m+M)v_2 \Rightarrow v_2=v_1\frac{m}{m+M}.$$

Изменение энергии системы «тело — тележка» — это работа действующей между ними силы трения:

$$\frac{(m+M)v_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=-F_{тр}L,$$

где L — расстояние, пройденное телом по тележке. Учитывая, что $F_{тр}=\mu N=\mu mg$, получаем

$$L=h\frac{M}{\mu(m+M)}.$$

Возникает вопрос: почему мы рассчитываем работу силы трения так, как будто тележка покоится, а тело перемещается по ней на расстояние L? Разве работа не зависит от системы отсчета? Ответ заключается в следующем. Конечно, работа любой силы, приложенной к данному телу, зависит от системы отсчета. Например, если какая-то сила $\vec{F}$ разогнала тело массой m из состояния покоя до скорости $\vec{v}$, то работа этой силы положительна и равна изменению кинетической энергии тела: $A=mv^2/2-0$. Если же рассмотреть этот же процесс в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$ (рис. 5), то начальная скорость тела будет равна $-\vec{v}/2$, а конечная $+\vec{v}/2$, и работа окажется равной нулю: $A=m(v/2)^2/2-m(v/2)^2/2=0$. Однако в нашей задаче, проводя все рассуждения с точки зрения неподвижного наблюдателя, мы должны рассчитать работу сил трения как над телом, так и над тележкой — именно полная работа сил трения в уравнении (*) равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{тр}=F_{тр}s-F_{тр}(s+L)=-F_{тр}L.$$

Здесь s — перемещение тележки, $s+L$ — перемещение тела, работа силы трения над тележкой положительна, а над телом — отрицательна. Таким образом, общий итог получается точно таким же, как если бы тележка покоилась, а тело переместилось на расстояние L.

Тот факт, что полная работа сил трения не зависит от системы отсчета, имеет совершенно прозрачный физический смысл с энергетической точки зрения. В самом деле, полная работа сил трения равна, с противоположным знаком, изменению внутренней (тепловой) энергии тела и тележки, которое, очевидно, не должно зависеть от системы отсчета (ведь изменение температуры тел не зависит от того, какой наблюдатель его измеряет).

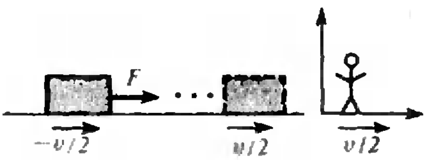


Рис. 5.

З а д а ч а 5. *Человек бросает камень массой m со скоростью $\vec{v}$ в горизонтальном направлении. В неподвижной системе отсчета работа человека над камнем равна $mv^2/2$, а в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, эта работа равна нулю. Не противоречит ли этот факт утверждению, что работа совершается человеком за счет ресурсов собственной внутренней энергии и потому не должна зависеть от системы отсчета?*

С точки зрения баланса энергий работа человека не должна зависеть от системы отсчета. Однако работа человека над камнем явно различна в разных системах отсчета. Как же так?

Все дело в том, что человек совершает работу не только над камнем, но и над... Землей, и для восстановления правильного баланса энергий надо учесть изменение энергии Земли при броске камня. Эти рассуждения кажутся весьма непривычными, так как обычно молчаливо предполагается, что изменением скорости Земли можно пренебречь (масса Земли очень велика), и учитывается только кинетическая энергия тел, движущихся в поле тяжести Земли. И все-таки доведем наши рассуждения до конца.

Приращение скорости Земли $\Delta\vec{V}$ можно найти из закона сохранения импульса системы «камень — Земля» (обозначим массу Земли через M):

$$m\vec{v}+M\Delta\vec{V}=0 \Rightarrow \Delta\vec{V}=-\frac{m}{M}\vec{v}.$$

В системе отсчета, где начальная скорость Земли равна нулю, приращение кинетической энергии Земли ничтожно мало, и мы его обычно не учитываем:

$$\Delta E_З=\frac{M(\Delta V)^2}{2}=\frac{m}{M}\frac{mv^2}{2}\ll\frac{mv^2}{2}.$$

Однако в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, изменение кинетической энергии Земли отнюдь не является пренебрежимо малым:

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2}+\Delta V\right)^2-\frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2}\right)^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}Mv\Delta V=\frac{mv^2}{2}.$$

Видно, что и здесь полная работа человека равна $mv^2/2$, только она совершается не над камнем, а над Землей.

Таким образом, необходимо иметь в виду, что изменение кинетической энергии очень тяжелого тела (Земли, стенки и т. п.) можно считать ничтожно малым только в той системе отсчета, где это тело в начальный момент покоится.

З а д а ч а 6. *Шарик, подвешенный на пружине жесткостью k, погружен в жидкость. Плотность материала шарика ρ больше, чем плотность жидкости $\rho_ж$. Вначале шарик удерживают в таком положении, что пружина не деформирована, а затем отпускают. Какое количество теплоты выделится в системе к тому моменту, когда колебания шарика прекратятся и он остановится? Объем шарика V.*

Прежде всего отметим, что выражение «выделяется такое-то количество теплоты» нельзя назвать удачным с сегодняшней точки зрения. Оно сохранилось и продолжает использоваться по чисто историческим причинам. На современном языке оно означает: «на столько-то увеличивается внутренняя, тепловая энергия тел системы».

Теперь — по существу. В нашей задаче изменение внутренней энергии системы «тело — жидкость — Земля» (обозначим его через Q), взятое с противоположным знаком, равно работе силы сопротивления и может быть вычислено как уменьшение механической энергии системы:

$$Q=-A_{сопр}=-\Delta E_{мех}.$$

Кинетическая энергия равняется нулю как в начальном, так и в конечном состоянии, так что нам надо найти изменение только потенциальной энергии. Здесь часто встречается ошибка, которая состоит в том, что, учитывая изменение потенциальной энергии пружины ($kx^2/2$) и потенциальной энергии шарика ($-mgx$), забывают учесть изменение потенциальной энергии жидкости. Смысл этого вклада в изменение энергии иллюстрирует рисунок 6: одновременно с перемещением шарика вниз происходит перемещение объема жидкости вверх из того места, где находится шарик в конечный момент, в то место, где он находился вначале.

Итак,

$$Q=-\frac{kx^2}{2}+mgx-m_жgx.$$

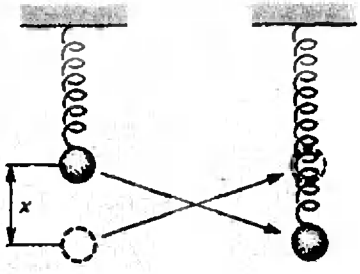


Рис. 6.

Смещение x можно найти из условия равновесия шарика

$$-mg+m_ж g+kx=0,$$

($m_ж g$ — сила Архимеда). Учитывая, что $m=\rho V$ и $m_ж=\rho_ж V$, получаем окончательно

$$Q=\frac{((\rho-\rho_ж)gV)^2}{2k}.$$

Замечание. Можно было не думать об изменении энергии жидкости, но тогда, записывая закон изменения механической энергии, необходимо было учесть работу силы Архимеда как внешней силы по отношению к системе «тело — Земля»:

$$\Delta E_{мех}=A_{сопр}+A_{Арх}=-Q-m_ж gx$$

(работа силы Архимеда при движении шарика вниз отрицательна). Такой более формальный подход иногда оказывается проще и надежнее.

Упражнения

1. Тело съезжает с наклонной плоскости, высота которой h, а основание b. Какой путь пройдет тело по горизонтали, если коэффициент трения на всем пути равен μ? Участок перехода с наклонной плоскости на горизонтальную считать плавным и гладким.

2. Два тела, массы которых m_1 и m_2, соединены недеформированной пружиной и лежат на горизонтальной поверхности (рис. 7). На первое тело начинает действовать постоянная сила F. При каком минимальном значении этой силы второе тело сдвинется с места? Коэффициент трения тел о поверхность μ.

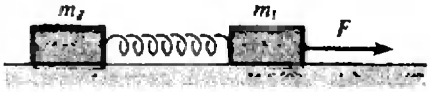


Рис. 7.

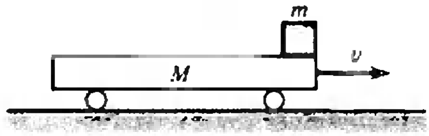


Рис. 8.

3. Маленькое тело массой m лежит на краю длинной тележки (рис. 8). Тележке ударом сообщают скорость v. На сколько переместится тело относительно тележки, если масса тележки M, а коэффициент трения между телом и тележкой μ? Трением между тележкой и плоскостью пренебречь.

4. После выстрела вслед грузовику, движущемуся со скоростью $v=10$ м/с, пуля застревает в задней стенке кузова. Считая, что начальная скорость пули $v_0=100$ м/с, а ее масса $m=20$ г, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.

5. Маленький шарик объемом V поднимают на высоту h_1 над поверхностью жидкости и отпускают. Упав в жидкость, шарик погружается на глубину h_2, после чего начинает всплывать. Найдите количество теплоты, которое выделится в системе к моменту максимального погружения шарика. Плотность материала шарика ρ меньше плотности жидкости $\rho_ж$.

Вслед за Бойлем и Ломоносовым...

(Начало см. на с. 48)

в момент начала кипения давление насыщенного пара жидкости равно внешнему давлению. А это означает, что кипение можно вызвать либо увеличив давление насыщенного пара, либо понизив внешнее давление — что и было сделано в нашем опыте.

Как вы знаете, давление насыщенного пара растет с увеличением температуры, причем растет довольно круто. В случае гексана эту зависимость, найденную экспериментально, аналитически можно описать так:

$$\lg p_н=6{,}88-\frac{1171}{t+224},$$

где давление $p_н$ выражено в мм рт. ст., а температура t — в градусах Цельсия.

По этой формуле вы можете оценить, на сколько вам удалось понизить давление в пробирке. Подставив в формулу значение наинизшей температуры, при которой вам в ваших опытах еще удавалось «заставить» гексан кипеть, вы найдете нужное давление насыщенного пара, а значит, и давление внутри пробирки.

Заметим, что поправки на изменение атмосферного давления в данном месте по сравнению с атмосферным давлением на уровне моря нередко приходится учитывать при работе в исследовательских лабораториях. (Например, в Колорадо — штате на западе США — обычная вода кипит при 90 °С.)

Наконец, последнее. Как и школьный опыт с воздушным шариком, раздувающимся при откачивании воздуха из-под колокола воздушного насоса, наш опыт с кипением гексана при различных температурах неплохо иллюстрирует работу хорошо известного в физике принципа Ле Шателье — Брауна. Он заключается в том, что если на систему, находящуюся в устойчивом состоянии, воздействует внешний фактор, который стремится вывести систему из этого состояния, то в ней начинают возникать процессы, компенсирующие эффект внешнего воздействия. В нашем случае таким процессом было, очевидно, кипение жидкости.

„Квант" улыбается

ЭВМ «УКСУС»

В настоящее время как в нашей стране, так и за рубежом получили широкое распространение электрические водоснабжающие машины (ЭВМ) типа «УКСУС» — Универсальная Конструкция, Стимулирующая Устойчивость Студента.

На основании многочисленных экспериментальных данных нами была получена эмпирическая формула, описывающая работу этих систем: $F(3)=B+\Gamma+C$, где В — вода, Г — газ, С — сироп, 3 — трехкопеечная монета.

Теоретическое обоснование эксперимента было выполнено в эпоху массового использования системы СГС. В настоящее время общепринятой является СИ, поэтому разрабатывается машина второго поколения «УКСУС-2», которая будет принимать исключительно соответствующие СИ трехрублевые ассигнации.

Рассмотрим алгоритм работы ЭВМ и действия экспериментатора.

В первую очередь устанавливается порт вывода, в качестве которого в системах типа «УКСУС» может использоваться простой граненый лабораторный стакан. Затем выполняется оператор ввода трехкопеечной монеты. Если вы ее не ввели, то закон сохранения энергии требует какого-либо иного воздействия на систему, например, применения оператора BEAT («БИТЬ»), который может быть расположен в любом месте программы. Так, на аналогичной установке Колумбийского университета обычно получают кока-колу ударом левой по монетоприемнику.

После введения трехкопеечной монеты «УКСУС» начинает работать и накапливать результаты (вода+газ+сироп) в порте вывода, за чем следует процедура DRINK («ПИТЬ»). В случай сбойной ситуации — отсутствует хотя бы одна из компонент (вода, газ или сироп) — следует и здесь применить оператор BEAT. Если и это не даст желаемого результата, программа предусматривает переход к невыполняемому оператору NICHEGO-NE-PODELAESH.

В. Зеленков

Р — значит ракета

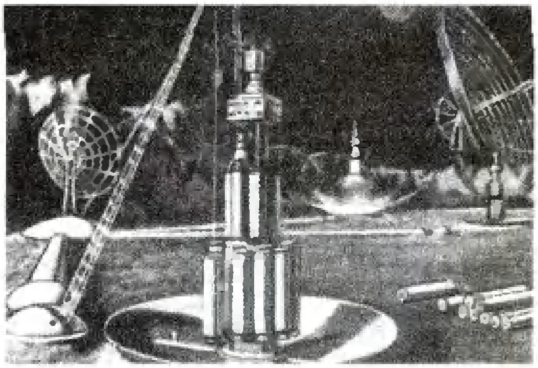
25 из 30

В. НИКОЛАЕВ

Юным читателям нашего журнала дата первого полета человека в космос наверняка кажется далекой стариной — ведь это было не только до того, как они родились, но и их родители тогда были моложе, чем сами читатели сегодня. Для большинства же сотрудников «Кванта» наоборот — трудно поверить, что после этого великого события прошло уже 30 лет — время, вполне достаточное для прихода в науку нового поколения ученых и инженеров. И хотя с 1961 года в освоении космического пространства достигнуто очень много, нам представляется любопытным и полезным сравнить то, что ожидалось, с тем, что получилось.

Эйфория от первых успехов была столь искренна, а темпы начальных шагов в развитии космической техники столь стремительны, что освоение и колонизация планет Солнечной системы, а затем и выход в межзвездное пространство представлялись делами ближайших десятилетий. Жизнь однако внесла в прогнозы существенные коррективы.

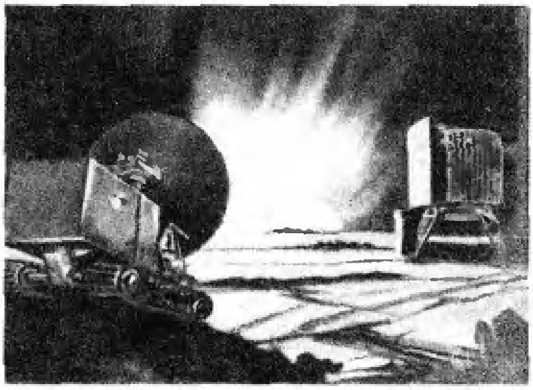
Вообще принято считать, что человеку свойственно в отношении прог-



Лунный порт для обслуживания межпланетных полетов. 1988 г. (К. Эрике).

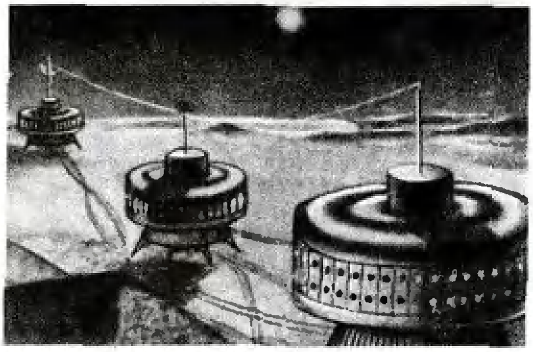
нозов событий на ближайшие годы проявлять повышенный оптимизм, а на более далекое будущее — чрезмерную осторожность.

В середине шестидесятых годов, а точнее, в 1966 году (вспомним, к тому времени состоялись уже полеты на кораблях «Восток» и «Меркурий», «Восход» и «Джемини», человек побывал в открытом космосе, а крупнейшие космические державы — одна открыто, а другая под большим секретом — работали над проектом экспедиции на Луну) в Вашингтоне состоялся IV симпозиум Американского астронавтического общества. С докладами выступили крупнейшие ученые и специалисты в области космонавтики. В своих докладах они попытались загля-



Станция для исследования Солнца на полюсе Меркурия. 1988 г. (К. Эрике).

Год	Транспорт	Связь, информация	Технология	Биология, химия	Физика
1970	Космическая лаборатория, посадка на Луну Ядерная ракета	Машинный перевод	Электрические аккумуляторы	Китовый язык	
1980	Посадка на планеты	Персональное радио	Термоядерный синтез	Экзобиология, искусственный организм	Гравитационные волны
1990		Искусственный разум	Передача энергии по радио	Увеличение восприятия	Внутриядерная структура
2000	Колонизация планет	Всемирная библиотека	Освоение дна моря		
2010	Путешествие к центру Земли	Телепатические устройства Логический язык	Контроль погоды	Контроль наследственности	Ядерный катализ
2020	Межзвездный зонд	Робот	Космическая геология		
2030		Контакт с внеземными цивилизациями		Биоинженерия Разумные животные	
2040			Превращения	Обесчувствление	
2050	Контроль над гравитацией	Запасная память	Планетная инженерия		
2060				Искусственная жизнь	Разрушение пространства — времени
2070	Околосветовые скорости		Контроль над климатом		
2080	Межзвездный полет				
2090	Передача материалов	Мировой мозг	Астроинженерия	Бессмертие	
2100	Встреча с инопланетными разумными существами				



Астробиологическая исследовательская база на Марсе, 1992 г. (К. Эрике).

нуть вперед на 35 лет, т. е. до 2001 года. К этому же времени относится и *общий прогноз развития науки* известного ученого и писателя-фантаста *А. Кларка*. И хотя сегодняшняя заметка посвящена освоению космического пространства, полагаем, что для полноты картины будет правильнее познакомить читателя сначала с *общим прогнозом* А. Кларка (см. таблицу на с. 57).

А вот как представляли рубеж двух тысячелетий участники симпозиума.

К. Эрике: «Сегодня, в конце 2000 г., межпланетные полеты по трассам от Меркурия до Сатурна осуществляются *комфортабельными пилотируемыми* летательными аппаратами... Тяжелые и самые совершенные автоматические зонды достигли планеты Плутон и прокладывают трассу к обширным и неисследованным районам, расположенным за этой планетой и в межзвездном пространстве...

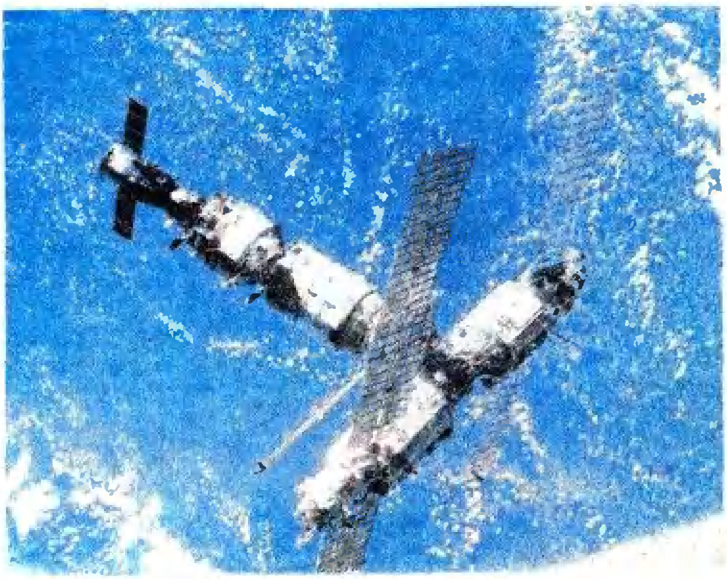
...наши гелионавты... побывали в самых разных областях Солнечной системы, от выжженных Солнцем побережий планеты Меркурий до ледяных скал Титана, спутника Сатурна...

...Прошло уже три года с тех пор, как была организована добыча и обработка металлической руды на Меркурии. На Марсе только что начаты работы по осуществлению долгосрочной программы внедрения в приполярных районах северного и южного полушарий планеты специально созданных для марсианских условий культур...

...Не только значительные технические достижения практически во всех областях космической техники, но главным образом прогресс в области разработки импульсных ядерных и термоядерных двигателей наконец-то обеспечили огромные энергетические возможности, необходимые для осуществления межпланетных полетов.

...благодаря им (силовым установкам — *В. Н.*) стали экономически возможными длительные полеты в пределах Солнечной системы...»

Первая постояннодействующая космическая станция «Мир» (запущена в 1986 г.) с модулями «Квант-1», «Квант-2» и «Кристалл» и космическим кораблем «Союз ТМ-10» (снимок сделан в 1990 г.).



Основными национальными космическими целями на период от 1970 до 1985 г. К. Эрике считал (в 1966 г.):

1. Исследование Солнечной системы автоматическими зондами и создание научно-технической базы будущих пилотируемых полетов к Венере и Марсу.

2. Организация постоянной научной лаборатории на Луне.

3. Создание функциональных (прикладного назначения) космических станций на околоземных, в т. ч. стационарных орбитах.

В. Пэрди: «...перечислю основные события в области освоения космоса...

1. Обитаемые космические станции на околоземной орбите, 1975—1980 гг.

2. Пилотируемый полет с пролетом мимо Венеры, 1980—1985 гг.

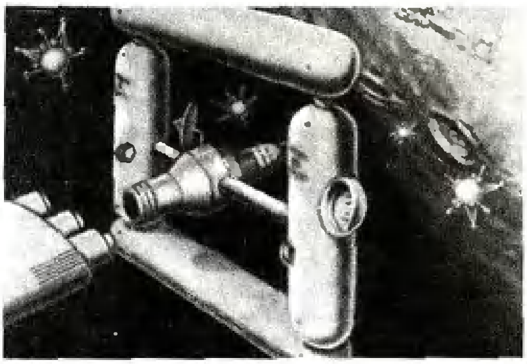
3. Обитаемая обсерватория на Луне, 1985—1990 гг.

4. Пилотируемый полет с пролетом мимо Марса, 1985—1990 гг.

5. Обсерватории в различных участках Солнечной системы (автоматические), 1980—1990 гг.

6. Полет человека на Марс, 1990—2000 гг.

...Транспортные грузовые средства многократного использования будут разрабатываться, но не будут применяться вплоть до 2000 г. или более позднего времени, поскольку объем перевозок будет еще недостаточен, чтобы оправдать эксплуатацию таких средств.»



Космическая станция в либрационной точке системы «Земля — Луна», 2001 г. (Х. Пэйдж).

Х. Пэйдж: «Вряд ли в 2001 г. туристские путешествия на Луну станут популярными ввиду недостатка комфорта, риска и слишком высокой стоимости таких путешествий...

...Путешественник начнет свою лунную экспедицию в сооружении, похожем на современные аэродромы для сверхзвукового транспорта. Пассажирское кресло в аэрокосмическом самолете будет находиться внутри герметичной капсулы, предназначенной для спасения пассажира в случае аварии... Взлет будет горизонтальным, как у современных самолетов».

Полет А. Сереброва в автономном средстве космонавта (1990 г.).

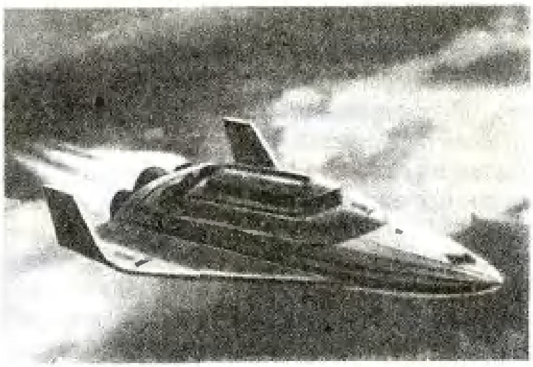
Рекордсмен по длительности пребывания на орбите М. Манаров (1988 г.).

Монтажные работы на орбите уже не сенсация (А. Волков, 1988 г.).

Почему же не сбылись прогнозы (почти все) крупных специалистов в области космонавтики? Не претендуя на исчерпывающий ответ, отмечу несколько, на мой взгляд, основных причин.

Самая главная — указанные цели не были востребованы обществом. Читатели «Кванта» могли ознакомиться («Квант» № 2 за 1991 г.) с основными целями и задачами в освоении космического пространства, предлагаемыми одним из разработчиков космической техники в СССР — профессором К. Феоктистовым. Его взгляды отличаются большей прагматичностью, чем у его американских коллег. Было ли так же в 1966 г.? Или головокружение от успехов оказывало такое же воздействие и на советских специалистов? Во всяком случае в конце 60-х годов проработками марсианского пилотируемого корабля занимались и у нас в стране.

Другая причина — высокая и все возрастающая стоимость космических программ. К тому же, слишком большое внимание к использованию космоса в военных целях отодвигало гражданские и научные программы. Кроме того, соперничество СССР и США зачастую вело к решению сиюминутных задач, отнимающих много средств, но далеких от нужд государств. Такой программой стала программа пилотируемых полетов на Луну. Далеко не оптимальными получились транспортные системы многоразового использования.



Аэрокосмический самолет с пассажирским отсеком. 2001 г. (Х. Пэйдж).

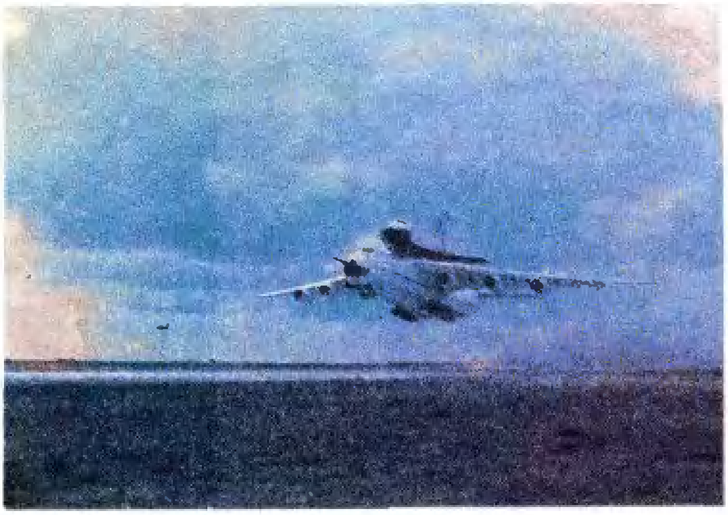
Не удалось пока построить и экономичную, надежную и высокоэффективную двигательную установку, о которой говорил К. Эрике. Такой двигатель особенно эффективен при межпланетных перелетах.

По существу, из всего перечня предполагавшихся программ сбылась лишь та, что связана с использованием орбитальных станций. Ведь их эксплуатация продолжается уже два десятка лет, причем комплекс «Мир» стал первой постоянно действующей, модульной базой.

Любопытна оценка использования многоразовых транспортных систем,

(Окончание см. на с. 63)

Хотя яблони на Марсе еще не цветут... (А. Александров. 1987 г.).



«Буран» и «Мрия» (1989 г.). Почти по Х. Пэйджу?

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и, в первую очередь, на физический факультет МГУ (*при поступлении на физический факультет удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией*).

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем физическим специальностям, фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, а также успешно работать в таких областях науки и техники, где стыкуются два или несколько научных направлений. Это — биофизика и геофизика, радиогамма-инфракрасная астрономия и создание искусственного интеллекта, химическая физика и астрофизика и т. п.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу.

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*11*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816, г. Калуга, ул. Ленина, д. 88, кв. 99*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и отсылается обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—5, а поступающим в 11 класс — задачи 4—8.

1. «Меловая линия». По поверхности стола движется с постоянной скоростью черная доска. По доске движется кусочек мела, пущенный по ней так, что в начальный момент скорость мела относительно стола перпендикулярна скорости доски. Какой формы след оставит мел при своем движении?

2. «Перегрузка». С какой силой давит космонавт массой 60 кг на опору при вертикальном взлете ракеты с ускорением 9 g?

3. «Подъемник». Ленточный подъемник образует угол α с горизонтом. С каким максимальным ускорением может подниматься ящик на таком подъемнике, если коэффициент трения μ? Лента не прогибается.

4. «Гололед». На обледеневшем участке шоссе коэффициент трения между колесами и дорогой в десять раз меньше, чем на необледеневшем. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обледеневшем участке шоссе остался прежним?

5. «Пружина». К концу висящей вертикально пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой m. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают еще один груз такой же массы. Определите длину растянутой пружины. Жесткость пружины k, а ее длина в нерастянутом состоянии L.

6. «Снаряд». Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии L (по горизонтали) от пушки на два одинаковых осколка. Один из них возвращается к пушке по первоначальной траектории снаряда. Где упадет второй осколок?

7. «Шланг». Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углами α и β к горизонту с одинаковой начальной скоростью v. На каком расстоянии от отверстия (по горизонтали) струи пересекаются?

8. «Опыт Милликена». Заряженная положительным зарядом пылинка массой m находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Между пластинами создана разность потенциалов U. На сколько необходимо изменить разность потенциалов, чтобы пылинка осталась в равновесии, если ее заряд уменьшился на q? Расстояние между пластинами d.

Юные математики встречаются на Кубани

В течение почти 20 лет каждый год в начале ноября школьники, увлеченные математикой, их преподаватели, а с ними и многие члены редколлегии «Кванта», как перелетные птицы, тянулись в теплые края: в дни осенних каникул в Батуми проходили математические праздники. (О них наш журнал не раз писал.) К сожалению, в последние годы традиция батумских праздников прервалась. И вот, в прошлом году вновь поезда и самолеты повезли юных математиков на юг, на сей раз — в Краснодар, где с 3 по 10 ноября впервые проводился Фестиваль юных математиков. Организаторы сумели без раскачки придать ему широкий размах: в Фестивале участвовали гости из Москвы, Ленинграда, Киева, Одессы, Челябинска, Кирова, Ижевска, Белорецка, болгарского города Бургаса и 13 команд из Краснодарского края, а всего — 25 команд. И это при том, что не все приглашенные — а приглашения рассылались по результатам Всесоюзного турнира городов — смогли приехать в этот раз.

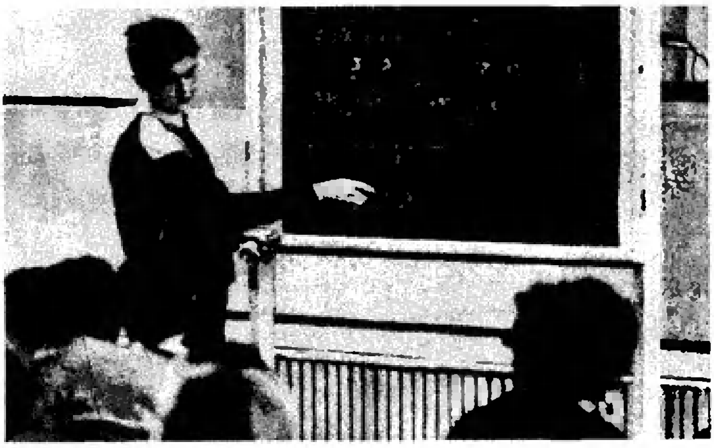
Как и на праздниках в Батуми, программа краснодарского Фестиваля включала научную конференцию, КВН, лекции по математике для школьников и учителей. Были в ней и нововведения, например отборочный тест в ФМШ при МГУ. Однако главные события развернулись, пожалуй, на командном математическом турнире. Как же он был построен при таком большом числе команд-участниц? Первый этап проводился по образцу известного соревнования телевизионных знатоков «брейн-ринг»: команды получали задачи (типа задач «Кванта» для младших школьников») одновременно и решали их на время. В результате определились 8 четвертьфиналистов, продолживших бои по олимпийской системе с выбыванием. В финал вышли кировчане и ленинградцы. Несколько неожиданно победила команда Кирова, основной вклад в успех которой внес капитан — Иван Изместьев. Победители получили один из двух большущих самоваров — главных призов Фестиваля. А второй самовар увезли киевляне, выигравшие встречу КВН (капитан — Ира Шевченко).

Если математический турнир занял в общей сложности 4 дня, то конференция уложилась в один. Однако интересных докладов было сделано немало. Назовем среди них очень содержательный, хотя, честно говоря, не слишком понятный для большинства слушателей, доклад Миши Темкина (57 шк., Москва) «Алгоритмы нахождения группы классов дивизоров квадратичного поля», доклад Алексея Долгорукова (ФМШ при МГУ), исследовавшего недавно придуманные дискретные модели солитонов, выступления отличившегося четкостью и высокой культурой изложения капитана ленинградской команды Всеволода Жуховицкого о формуле Пика в плоском и многомерном случае и Лены Филипповой из Одессы на модную сейчас тему «Узлы, зацепления и их полиномы», доклад Виктора Пасховера из Киева «Элементы эргодической теории». Пусть не обижаются те, кого мы не назвали,— организаторы Фестиваля намерены опубликовать материалы конференции.

Спортивный элемент, привнесенный матбоями, придал Фестивалю своеобразие, которое стоит сохранить и в дальнейшем. Правда, некоторые команды, выбывшие на первых этапах, почувствовали себя отчасти «не у дел», по крайней мере, по сравнению с теми, кто продолжал борьбу. Выход они нашли, устроив по собственной инициативе бои между собой. Вероятно, система розыгрыша нуждается в усовершенствовании.

Одновременно с Фестивалем в Краснодаре прошел семинар учителей математики школ края. На одном из заседаний учителя встретились с руководителями команд, рассказавшими об организации и методах своей работы; на этой встрече выступил и представитель редколлегии «Кванта». Вообще, все гости Фестиваля получили прекрасную возможность пообщаться и почерпнули для себя немало полезного.

Участники Фестиваля остались довольны и культурной программой. Они побывали на экскурсиях по Краснодару и в город-герой Новороссийск, посетили спортшколу акробатики, подготовившую немало чемпионов, где имели возможность попрыгать на батуте, концерт замечательного Кубанского казачьего хора. Краткое торжественное за-



крытие Фестиваля с вручением призов (в том числе подписка на «Квант» и «Юность») завершилось представлением Краснодарского эстрадного «Театра премьер».

Самых добрых слов заслуживают устроители краснодарского Фестиваля и в первую очередь доценты математического факультета Кубанского государственного университета И. В. Федоренко и С. Л. Крупецкий (оба они — народные депутаты) и декан факультета повышения квалификации В. А. Лазарев. Начав работу по организации буквально за месяц до открытия Фестиваля, они сумели провести его на, пожалуй, максимально возможном уровне, продумав все, от такой мелочи, как сувенирная чашка с символикой Фестиваля для каждого из более чем 200 гостей, до размещения участников в лучших гостиницах города. Участников Фестиваля приветствовали председатель краевого Совета Н. И. Кондратенко, ректор Кубанского университета член-корреспондент АН СССР В. А. Бабешко, руководители других краевых и городских организаций. Особую роль в финансировании и проведении Фестиваля сыграл Краснодарский горсовет и его председатель В. А. Самойленко, на закрытии пригласивший всех участников на второй Фестиваль в 1991 году.

Руководители команд, обсудившие итоги Фестиваля, были единодушны: это хорошее начало, за которым должно последовать продолжение. И оно уже следует — ниже мы печатаем объявление об очередном краснодарском Фестивале.

В. Дубровский

II Фестиваль юных математиков в Краснодаре

Ассоциация «Математическое просвещение Кубани» и журнал «Квант» планируют в конце октября 1991 года в Краснодарском крае провести II Фестиваль юных математиков. В программе Фестиваля:

— научная конференция школьников,

— турнир математических боев,

— лекции для школьников по нестандартным разделам элементарной математики,

— КВН,

— лекции и диспуты по актуальным проблемам современной науки,

— компьютерные соревнования,

— обширная культурная программа.

К участию в Фестивале приглашаются команды (10 человек, включая руководителя) математических школ, классов, кружков, секций, домов пионеров и т. п. Состав участников будет сформирован по предварительным заявкам, которые необходимо выслать до 1 мая 1991 г. по адресу:

350640, Краснодар, ГСП, ул. К. Либкнехта, 149, Кубанский государственный университет, ФППК ОНО, оргкомитет Фестиваля.

Справки по телефону в Краснодаре: 33-85-38, секретарь Оргкомитета — Корнеева Юлия Петровна.

Время проведения Фестиваля на Кубани — время золотой осени, хорошей погоды, богатого урожая, фруктов, ярмарок. В работе Фестиваля ожидается участие зарубежных команд. Участников Фестиваля ждут памятные сувениры и призы.

Оргкомитет

25 из 30

сделанная В. Пэрди. Даже при слишком оптимистичных оценках грузопотока он предвидел их невысокую эффективность. В этом уже убедились на примере «Спейс Шаттла» американцы (что не помешало нам повторить их ошибки).

Анализ прогнозов А. Кларка показывает, что чересчур оптимистичными оказались оценки не только в области космонавтики.

Отсюда можно сделать вывод, что 25 лет — все же тот срок, прогнозы на который, как правило, завышены. Когда же можно ожидать исполнения программы, предложенной американскими учеными? Думается, на ее выполнение уйдет еще 40—50 лет. А может, во мне говорит скептик? Если так, то читатели «Кванта» имеют возможность опровергнуть мои сомнения. Во всяком случае сегодня не видно принципиальных технических трудностей, которые бы не позволили реализовать программы освоения Солнечной системы (межзвездные перелеты — вопрос особый).

Будем же верить, что независимо от того, какие цели будут выбраны на ближайшие десятилетия, они окажутся достаточно благородными, чтобы их стоило претворять в жизнь!

Варианты вступительных экзаменов

больше площади ее основания. Найдите плоский угол при вершине этой пирамиды.

Публикацию подготовил О. Иванов

Ленинградский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x+8}>\sqrt{7-x}+\sqrt{3x+6}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\frac{3}{x}=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-1}x-2\log_x(x-1)<1.$$

4. Через некоторую точку внутри треугольника площадью S проведены прямые, параллельные двум из его сторон. Площади треугольников, отсекаемых этими сторонами, равны S_1 и S_2. Найдите площадь треугольника, ограниченного этими прямыми и третьей стороной треугольника.

5. Шар касается основания правильной четырехугольной пирамиды объема V и ее боковых ребер. Найдите объем шара, если известно, что плоский угол при вершине пирамиды равен α.

Вариант 2

1. Три числа являются первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии и, соответственно, первым, третьим и вторым членами геометрической прогрессии. Найдите эти числа, если известно, что сумма квадрата первого из них, удвоенного второго и утроенного третьего равна 3/4.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{|x+1|+|x+5|}>\left|x+\frac{5}{2}\right|.$$

3. Решите уравнение

$$\cos 2x+\sin 2x=\cos 4x+\sin 4x.$$

4. Решите неравенство

$$e^{3(x+1)}-3e^{x+1}>\sqrt{3}.$$

5. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в a раз больше площади ее основания. Найдите плоский угол при вершине этой пирамиды.

Ленинградский государственный технический университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Найдите $\cos(2\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Покажите, что результат есть рациональное число.

2. Решите уравнение

$$\sin^2x-\sqrt{3}\sin 2x=\cos^2x-2.$$

Выпишите те решения, которые находятся в интервале (0; 4).

3. Решите неравенство

$$\log_4\left(7^{x^2-x}+49^{x^2-x+1}+14\right)>3.$$

4. Найдите все значения a, при которых многочлен

$$x^4+ax^3+15x^2-18x+9$$

является квадратом многочлена второй степени относительно x.

5. Дан отрезок длиной 2. Три окружности радиусом 2 имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Зная, что $\log_3 2=a$, $\log_5 3=b$, найдите $\log_{30}18$.

2. Найдите решения уравнения

$$\cos^4x-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0{,}25,$$

удовлетворяющие условию $16^x+7\cdot 4^{1-x}>29$.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-5x+12}+2x^2\geqslant 5x.$$

4. Найдите сумму первых 50 совпадающих членов двух арифметических прогрессий 2, 7, 12, ... и 3, 10, 17, ...

5. Точка M удалена от сторон угла в $60°$ на расстояния 3 и 9 (основания перпендикуляров, опущенных из M на

стороны угла, лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях). Прямая, проходящая через M, пересекает стороны угла и отсекает треугольник периметром $12\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант 3
(радиофизический факультет)

1. При каких значениях a справедливо равенство

$$\frac{a+9}{a^2-9}\left(\frac{a-3}{9a+81}+9-a^2\right)+\frac{161+54a}{9a+27}=|a+3|?$$

2. Решите уравнение

$$2\log_4^2(8x)+3\log_2\sqrt{\frac{x}{2}}=3^{9/4}\log_{3\sqrt{3}}4.$$

3. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y=-5x+\cos x-\sqrt{3}\sin x$$

в точках наибольшего наклона касательной к оси Ox, считая, что абсциссы точек касания принадлежат промежутку $(-3\pi;\ -\pi)$.

4. При каких действительных значениях a неравенство

$$(a-1)\cdot 4^x+(3-a)\cdot 2^{2x+1}+a>1$$

справедливо при всех действительных значениях x?

5. Точка M удалена от сторон правильного треугольника (от прямых, на которых расположены его стороны) на расстояния 2, 3, 6. Найдите сторону правильного треугольника, если его площадь меньше 30 и больше 15.

Вариант 4
(факультет технической кибернетики)

1. Найдите корень уравнения $\mathrm{ctg}\,x-\sin 2x=16\sin 4x$, ближайший к числу $-\sqrt{13}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{5}}(x^2-10x+25)>0.$$

3. При каких значениях a уравнение $4^x-(a+3)\cdot 2^x+4a-4=0$ имеет один корень? Найдите этот корень.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+2y^2-x+8y=6,\\1{,}5x^2+3y^2-x+5y=12.\end{cases}$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются. Известно, что $AD=2$, $CD=4$, $BD=5$. Найдите радиусы окружностей.

Физика

Задачи устного экзамена

1. В момент, когда опоздавший пассажир вбежал на платформу, мимо него за время t_1 прошел предпоследний вагон. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2. На сколько опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд движется равноускоренно, длина вагонов одинакова.

2. Мальчик массой $m=45$ кг вращается на «гигантских шагах» с частотой $n=15$ об/мин. Длина каната $l=5$ м. Какова сила натяжения каната?

3. Тяжелый стержень согнут посередине под прямым углом и подвешен свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует верхняя половина стержня?

4. В цилиндрический сосуд с водой опустили железную коробочку, из-за чего уровень воды в сосуде поднялся на высоту $l=2$ см. На сколько опустится уровень воды, если коробочка утонет? Плотность железа $\rho=7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

5. В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Найдите период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда $S=0{,}3$ см^2, а масса ртути $m=484$ г. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3.

6. Один моль идеального газа, внутренняя энергия которого $U=3/2\ RT$, сначала нагревают, затем охлаждают так, что замкнутый цикл *1—2—3—1* на p, V-диаграмме состоит из отрезков прямых *1—2* и *3—1*, параллельных осям p и V соответственно, и изотермы *2—3*. Найдите количество теплоты, отданное газом в процессе охлаждения. Давление и объем газа в состоянии *1* равны p_1 и V_1, давление газа в состоянии 2 равно p_2.

7. Конец капиллярной трубки радиусом r опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии жидкости по капилляру? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ.

8. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q\gg q$. Определите силу, с которой растянуто кольцо.

9. Амперметр с сопротивлением $R_1=2$ Ом, подключенный к источнику тока, показывает ток $I=5$ А. Вольтметр с сопротивлением $R_2=150$ Ом, подключенный к такому же источнику тока, показывает напряжение $U=12$ В. Найдите ток короткого замыкания источника.

10. Осветитель, предназначенный для получения направленных световых пучков, состоит из точечного источника света и линзы диаметром $D=6$ см с фокусным расстоянием $F=15$ см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен источник, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметром $d=4$ см? Расстояние от линзы до экрана $L=100$ см.

Публикацию подготовили
С. Преображенский, В. Романов,
И. Русанов, Ю. Хвостов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

(математический факультет)

Вариант 1

1. Между какими соседними целыми числами лежит число $\sqrt{(\sqrt{3}-8)^2}$?

2. Не решая уравнения $2x^2+x+1=0$, вычислите сумму кубов его корней.

3. Что больше: $\cos(-1)$ или $\operatorname{tg}(-4,1)$?

4. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-8}}.$$

5. Решите неравенство

$$1+\frac{1}{\log_{\frac{1}{7}} x+1}<0.$$

6. Найдите все решения уравнения $8\sin x+5=2\cos 2x$, удовлетворяющие условию $\cos x\geqslant 0$.

7. Автобус и такси находятся на расстоянии 12 км. Через сколько времени такси догонит автобус, если известно, что скорость автобуса 60 км/ч и она составляет 2/3 скорости такси?

8. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 4 больше одного и на 2 больше другого катета. Определите площадь круга, описанного около этого треугольника.

9. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите угол наклона боковой грани к основанию пирамиды.

10. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины двух ребер основания параллельно высоте пирамиды. Вычислите площадь сечения, если радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен 6, а боковое ребро пирамиды 10.

Вариант 2

1. Между какими соседними целыми числами лежит число $\sqrt{(3-\sqrt{26})^2}$?

2. Пусть $f(x)=x^2(x+1)^2-6x(x+1)$. Решите уравнение $f(x)+8=0$.

3. Определите знак числа $\operatorname{tg} 2\cdot\operatorname{tg} 3\times\operatorname{tg} 4$.

4. Постройте график функции $y=3^{\log_3(\sin x)}$.

5. Решите неравенство

$$20\cdot 2^x+19+\frac{77}{2^x-3}>0.$$

6. Решите уравнение

$$\log_3 x+3-\frac{11}{4\log_{\frac{1}{3}} x+3}=0.$$

7. Сахарный тростник при переработке в сахар теряет 91 % своей первоначальной массы. Сколько надо взять сахарного тростника, чтобы получить 450 кг сахара?

8. В равнобедренной трапеции длины оснований 21 и 9, а длина высоты 8. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

9. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.

10. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, сторона основания равна 12. Вычислите площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.

Публикацию подготовила
Т. Торубарова

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=(x-a)^3+(x+a)^3.$$

а) При каких a значение $f(1)$ равно 26?

б) Решите неравенство $f(x)<8x^2$ при $a=1$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x$ в зависимости от a?

2. Дан ромб $ABCD$. Сторона ромба равна 1, угол B равен 2α. Из вершины A опустили перпендикуляр AF на прямую CD. Пусть $S(\alpha)$ — площадь треугольника ACF.

а) Докажите, что $S(\alpha)=2\sin^3\alpha\cos\alpha$.

б) При каких α площадь $S(\alpha)$ в 4 раза меньше площади ромба?

в) При каком α величина $S^2(\alpha)$ максимальна?

3. Дана функция
$f(x)=8^x-3\cdot 4^x$.

а) Найдите корни функции f.

б) Вычислите значение $f(\log_{\sqrt{2}}3)$.

в) Решите неравенство $\log_2 f(x)\geqslant 2+x$.

г) Найдите множество значений функции f.

Вариант 2

1. Дана функция

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x^2}{x^2-2}.$$

а) Какова область определения данной функции?

б) Решите уравнение $f(x)=8/3$.

в) Решите неравенство $f(x)\leqslant -2/3$.

г) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x^2$?

2. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 на диагонали AC взята точка M; длина отрезка AM равна a.

а) Найдите длину $L(a)$ отрезка MD.

б) Решите уравнение $L(a)=\sqrt{5}/(2\sqrt{2})$.

в) При каком a величина $L(a)$ минимальна?

3. Дана функция

$$f(x)=27+3^{x+4}+9^{x+2}+27^{x+1}.$$

а) Вычислите значение $f(-1)$.

б) Решите уравнение $f(x)=3^6$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=3^{-x}$?

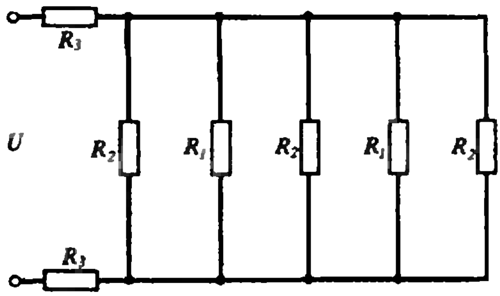
Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Автомобиль движется по мосту, имеющему форму дуги радиусом $R=40$ м, обращенную выпуклостью вверх. Коэффициент трения скольжения колес о мост $\mu=0{,}57$. а) Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развить автомобиль в высшей точке моста, если он в этот момент будет иметь скорость $v=50{,}4$ км/ч? б) Как будет направлен вектор полного ускорения в этой точке?

2. В сосуд малой теплоемкости, где находится $m_1=500$ г льда при температуре $t_1=0$ °С, вливают $m_2=200$ г воды, нагретой до $t_2=80$ °С. Удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К). а) Какая температура установится в сосуде и каким будет его содержимое? б) Будет ли одинаковым время установления термодинамического равновесия, если лед будет монолитным куском или наколот мелкими кусочками?



3. Напряжение, приложенное к цепи (см. рисунок), $U=11$ В. Резисторы, включенные в цепь, имеют следующие сопротивления: $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=3$ Ом. а) Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в резисторах R_1, R_2 и R_3. б) Как изменится напряжение на резисторе R_3 при уменьшении сопротивления резистора R_1?

4. Проводник длиной $l=30$ см с током $I=20$ А расположен под углом $\alpha=30°$ к линиям однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}4$ Тл. а) Найдите работу по перемещению проводника перпендикулярно магнитному полю на расстояние $a=25$ см. б) Как изменится эта работа, если проводник сложить вдвое?

5. Светящаяся точка находится на главной оптической оси собирающей линзы на двойном фокусном расстоянии от нее. а) Постройте изображение этой точки. б) Куда будет двигаться изображение при приближении точки к линзе?

Вариант 2

1. Тело массой $m_1=5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2=2{,}5$ кг. После центрального и абсолютно неупругого удара кинетическая энергия системы стала равной $E_k=5$ Дж. а) Найдите кинетическую энергию системы до удара. б) На что расходуется кинетическая энергия тел при неупругих ударах?

2. Кусок льда массой $m=2$ кг при температуре $t=-20$ °C нагрели, сообщив ему количество теплоты $Q=1$ МДж. Удельная теплоемкость льда $c_л=2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $L=2{,}3$ МДж/кг. а) Определите установившуюся температуру. б) Могут ли одновременно при одной и той же температуре сосуществовать лед, вода и водяной пар?

3. Амперметр с внутренним сопротивлением $R_A=2$ Ом, подключенный к источнику тока, показал ток $I=5$ А; вольтметр с внутренним сопротивлением $R_V=15$ Ом, подключенный к тому же источнику, показал $U=12$ В. а) Определите ток короткого замыкания источника. б) Примерно какое сопротивление нужно подключить к данному источнику, чтобы создать режим короткого замыкания?

4. Однородные магнитное и электрическое поля перпендикулярны друг другу. Напряженность электрического поля $E=0{,}5$ кВ/м, индукция магнитного поля $B=1$ мТл. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса $m=9\cdot10^{-31}$ кг. а) С какой скоростью и в каком направлении должен лететь электрон, чтобы двигаться прямолинейно? б) Может ли электрон двигаться прямолинейно только в одном электрическом или в одном магнитном поле?

5. Пучок параллельных лучей падает из воздуха на поверхность воды под углом $\alpha=60°$. Ширина пучка в воздухе $d=10$ см. Показатель преломления воды $n=4/3$. а) Определите ширину пучка в воде. б) Будет ли при этом происходить и отражение света?

Публикацию подготовили
И. Деянов, Д. Козлов, М. Марамзина, А. Степанов, С. Фомин

Вузы мира

Финальный экзамен по физике в США

Ниже приводятся тексты задач по физике, предлагавшихся выпускникам школ США весной 1990 года. В таком пробном экзамене могут участвовать все желающие. Результаты экзамена (в баллах) учитываются при решении вопроса о приеме в вуз.

I ТУР

Часть 1

(по 2 балла за каждый правильно выбранный ответ, всего — 80 баллов)

1. Если $\vec{A}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{B}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, модуль вектора $\vec{A}$ равен: a) 1; b) 9; c) 11; d) 29; e) никакой из перечисленных ответов не верен. Скалярное произведение $\vec{A}\cdot\vec{B}$ равно: a) $\sqrt{8}$; b) 17; c) $6\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$; d) $5\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$; e) никакой ответ не верен.

2. Какая из следующих ситуаций не возможна: a) тело имеет скорость, направленную на север, и ускорение, направленное на юг; b) тело имеет скорость, направленную на север, и ускорение, направленное на север; c) тело имеет нулевую скорость и нулевое ускорение; d) тело имеет постоянную скорость и переменное ускорение; e) тело имеет переменную скорость и постоянное ускорение?

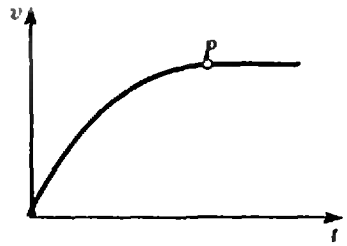


Рис. 1.

3. На рисунке 1 приведен график зависимости скорости машины от времени. В точке P машина должна: a) двигаться с положительным ускорением; b) двигаться с отрицательным ускорением; c) двигаться с нулевым ускорением; d) двигаться по кривой; e) быть неподвижной.

4. Какой из графиков (см. рис. 2) представляет движение тела, скорость которого уменьшается?

5. Какой из графиков (см. рис. 3) представляет движение с постоянной скоростью?

6. Предмет сброшен с заднего края тележки, движущейся прямолинейно по гладкой дороге с постоянной скоростью. Трением о воздух пренебречь. Предмет упадет: a) впереди тележки; b) на тележку; c) позади тележки; d) зависит от начальной скорости предмета; e) зависит от скорости тележки.

7. Бомбардировщик, летящий горизонтально, должен сбросить бомбу перед тем, как он будет пролетать над целью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какое из высказываний следует считать неверным: a) бомбардировщик будет находиться непосредственно над бомбой, когда она взорвется; b) ускорение бомбы во время падения не меняется; c) скорость самолета равна скорости бомбы, когда она попадает в цель; d) бомба движется по криволинейной траектории; e) время полета бомбы не зависит от скорости самолета.

8. Пуля, вылетевшая из ружья горизонтально: a) останавливается только из-за сопротивления воздуха; b) находится в воздухе дольше, чем пуля, брошенная вниз с такой же высоты; c) движется по прямой линии; d) достигает земли одновременно с пулей, брошенной вниз с такой же высоты; e) достигает земли раньше, чем пуля, брошенная вниз с такой же высоты.

9. Частица движется по окружности с постоянной скоростью. Векторы мгно-

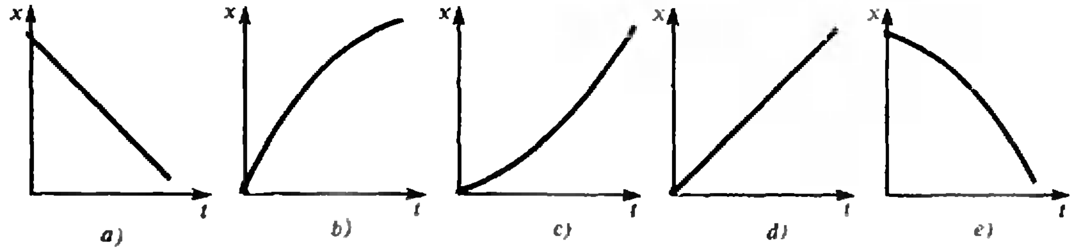


Рис. 2.

венной скорости и ускорения: a) противоположны друг другу; b) перпендикулярны; c) параллельны; d) постоянны в течение всего времени движения; e) никакой из перечисленных выше ответов не верен.

10. Человек стоит на весах в кабине лифта. Весы дают наибольшее показание, когда лифт: a) движется вниз с уменьшающейся скоростью; b) движется вверх с уменьшающейся скоростью; c) движется вниз с увеличивающейся скоростью; d) движется вверх с постоянной скоростью; e) движется вниз с постоянной скоростью.

11. В игре «перетягивание каната» участвуют две команды. Каждая тянет канат на себя с силой 5000 Н. Натяжение каната равно: a) 2500 Н; b) 5000 Н; c) $5000\sqrt{2}$ Н; d) 10 000 Н; e) 0.

12. Машина движется на восток с постоянной скоростью. Результирующая сила, действующая на машину, направлена на: a) восток; b) запад; c) север; d) юг; e) равна нулю.

13. Брусок соскальзывает вниз по наклонной плоскости с углом наклона 30°. Определите, при каком значении коэффициента трения скольжения он будет двигаться с постоянной скоростью: a) 2; b) $\sqrt{3}$; c) $1/\sqrt{3}$; d) 1/2; e) нельзя установить.

14. На столе лежат три книги. Сила тяжести каждой указана на рисунке 4. Сила, действующая на книгу *z*, равна: a) 9 Н, вниз; b) 9 Н, вверх; c) 19 Н, вниз; d) 19 Н, вверх; e) никакой из приведенных выше ответов не верен.

15. 1 ньютон — это сила: a) тяжести тела массой 1 кг; b) тяжести тела массой 1 г; c) которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2; d) которая телу массой 1 г сообщает ускорение 1 см/с^2; e) которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 9,8 м/с^2.

16. Несмотря на то, что силы действия и противодействия равны по величине и противоположны по направлению, они не уравновешивают друг друга, потому что: a) в действительности сила действия всегда немного больше; b) сила противодействия появляется только после приложения силы действия; c) не всякая сила действия имеет силу противодействия; d) эти силы действуют на разные тела; e) эти силы действуют в разное время.

17. Мальчик тянет деревянную коробку по шероховатому горизонтальному полу с постоянной скоростью. На рисунке 5 показаны сила натяжения веревки *T*, сила тяжести коробки *F*, сила нормальной реакции *N* и сила трения *f*. Скажите, какое из утверждений верно: a) $T=f$ и $N=F$; b) $T>f$ и $N=F$; c) $T=f$ и $N<F$; d) $T>f$ и $N<F$; e) никакое утверждение не верно.

18. Тяжелый деревянный брусок медленно тянут по шероховатой поверхности, как показано на рисунке 6. Сила трения, действующая на брусок, в случае *2* по сравнению со случаем *1*: a) больше; b) такая же; c) меньше; d) нельзя сказать — зависит от угла α.

19. Брусок, сила тяжести которого 3 Н, прижимают к стене с силой 4 Н, направ-

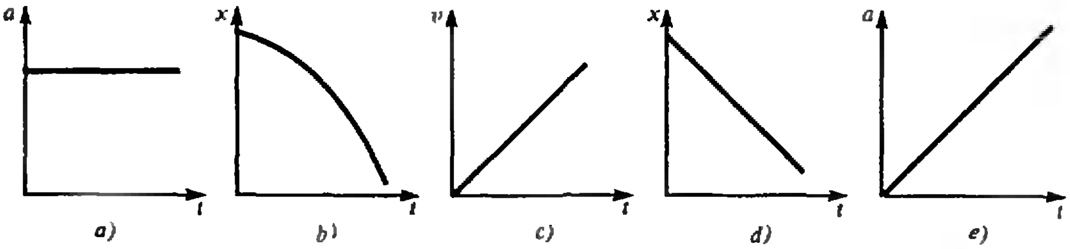


Рис. 3.

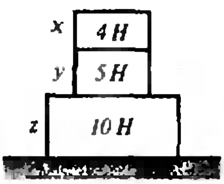


Рис. 4.

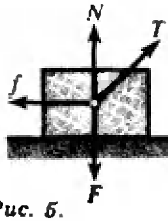


Рис. 5.

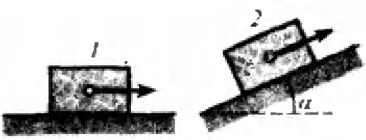


Рис. 6.

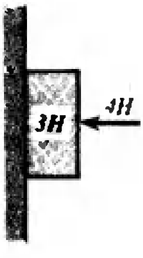


Рис. 7.

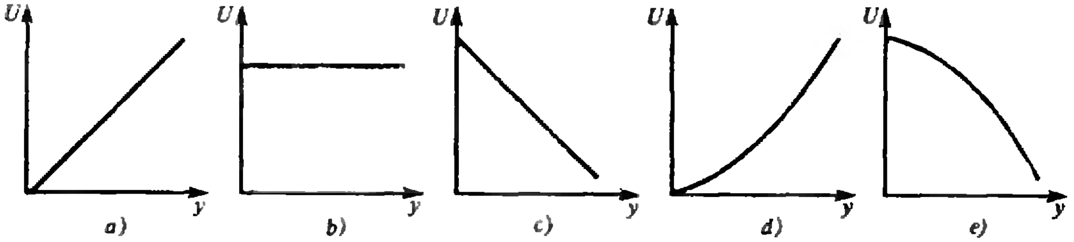


Рис. 8.

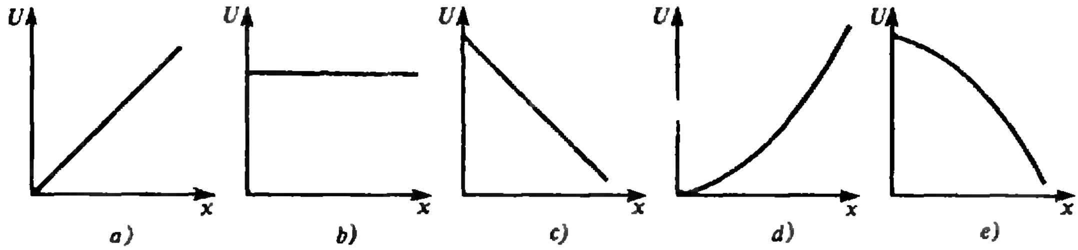


Рис. 9.

ленной горизонтально (рис. 7). Если коэффициент трения скольжения равен 0,8, то стена действует на брусок с силой: a) 3 Н; b) 3,3 Н; c) 4 Н; d) 5 Н; e) не равна ни одному из перечисленных значений.

20. Спутник находится на орбите над атмосферой Земли. Какое утверждение верно: a) результирующая сила, действующая на спутник, равна нулю; b) векторы скорости и ускорения параллельны друг другу; c) скорость спутника постоянна; d) спутник ускоряется по направлению к центру Земли; e) без источника энергии спутник упадет на Землю.

21. Работа, необходимая для того, чтобы остановить движущееся тело, пропорциональна: a) скорости тела; b) ускорению; c) квадрату скорости; d) квадрату ускорения; e) потенциальной энергии тела.

22. Штангист прикладывает силу 1500 Н, чтобы поднять штангу на высоту 2 м от пола за время 5 с. Во второй раз он поднимает ту же штангу за 10 с. Совершенная работа во втором случае, по сравнению с первым: a) в 4 раза меньше; b) в 2 раза меньше; c) такая же; d) в 2 раза больше; e) в 4 раза больше.

23. Покоящееся тело может совершить работу, если: a) его потенциальная энергия положительна; b) его потенциальная энергия отрицательна; c) оно может двигаться так, чтобы его кинетическая энергия уменьшалась; d) оно может двигаться так, чтобы его потенциальная энергия уменьшалась; e) ничего из перечисленного выше не верно.

24. Снаряд массой 2,5 кг вылетает с начальной скоростью 20 м/с под углом α к горизонту. Максимальная высота подъема равна: a) ≈ 10 м; b) ≈ 20 м; c) ≈ 40 м; d) ≈ 80 м; e) нельзя сказать — зависит от угла α.

25. Какой из графиков (см. рис. 8) правильно отражает зависимость потенциальной энергии U мяча от его координаты y?

26. Какой из графиков (см. рис. 9) правильно отражает зависимость потенциальной энергии U пружины от ее растяжения x?

27. Снаряд разрывается в воздухе на несколько осколков. Суммарный импульс непосредственно после взрыва: a) меньше импульса непосредственно перед взрывом, поскольку часть импульса перешла в кинетическую энергию осколков; b) больше, чем непосредственно перед взрывом, поскольку часть энергии взрыва превратилась в импульс осколков; c) неизвестен, если неизвестны масса и скорость каждого осколка; d) может быть как больше, так и меньше импульса перед взрывом — в зависимости от скорости осколков; e) ничего из перечисленного выше не верно.

28. Единица измерения квадрата импульса, деленная на единицу массы, есть: a) ньютон; b) джоуль; c) ватт; d) метр; e) метр в секунду.

29. Прямоугольный брусок движется по гладкой горизонтальной поверхности, переходящей в «мертвую петлю» (рис. 10). Брусок проходит положения *1*, *2*, *3*, *4*, затем снова *1* и возвращается на горизонтальную плоскость. В положении *3*: a) его суммарная механическая энергия минимальна; b) результирующая сила равна нулю; c) брусок мгновенно останавливается; d) результирующая сила направлена вверх; e) никакой ответ не верен.

30. Два шарика разных масс, сделанные из упругих материалов, подвешены в одной точке на легких нитях одинаковой длины. Более легкий шарик отводят в сторону, отпускают, и он сталкивается со вторым шариком. Определите, какие из величин сохраняются на всем протяжении движения шариков: a) кинетическая энергия; b) импульс; c) момент импульса; d) все из перечисленных выше; e) никакая из перечисленных.

31. Скажите, какая линейная величина имеет такую же единицу измерения, как и угловая: a) перемещение; b) скорость; c) ускорение; d) кинетическая энергия; e) никакая из перечисленных выше.

32. Однородные твердые тела, одно сферической формы, а другое — цилиндрической, имеющие одинаковые массы и радиусы, скатываются с наклонной плоскости. Оба тела катятся без проскальзывания, и мы видим, что: a) шар достигает основания наклонной плоскости первым, поскольку он имеет меньшую площадь соприкосновения с поверхностью; b) шар достигает основания первым, поскольку «захватывает» меньшую вращательную энергию; c) цилиндр достигает основания первым, поскольку «захватывает» большую вращательную энергию; d) они достигают основания в одно и то же время; e) никакой ответ не верен.

33. Человек, руки которого прижаты к бокам, вращается на легком диске (трение в оси мало́). Когда он вытягивает руки перпендикулярно туловищу: a) его момент инерции уменьшается, и поэтому угловая скорость вращения уменьшается; b) его момент инерции увеличивается, и поэтому угловая скорость уменьшается; c) его момент инерции уменьшается, и поэтому угловая скорость увеличивается; d) его момент инерции увеличивается, и поэтому угловая скорость увеличивается; e) никакой ответ не верен.

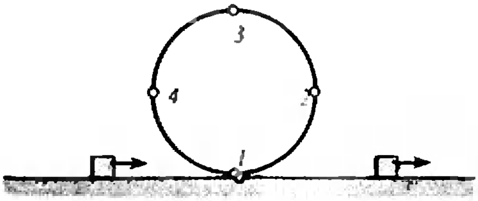


Рис. 10.

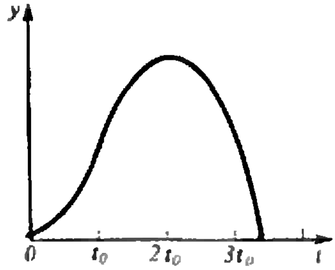


Рис. 11.

34. *Вектор момента импульса (углового момента)* Земли, обусловленный ее суточным вращением, направлен: a) по касательной к экватору на восток; b) по касательной к экватору на запад; c) точно на юг; d) точно на север; e) всегда к Солнцу.

35. Определите, где вес тела будет наименьшим: a) на экваторе; b) на Северном полюсе; c) в центре Земли; d) в 2000 милях над поверхностью Земли; e) вес тела везде одинаков.

36. Тело поднимают над поверхностью Земли на высоту, равную двум земным радиусам. Тогда: a) его масса уменьшится, а вес останется неизменным; b) масса уменьшится и вес уменьшится; c) масса останется прежней, а вес увеличится; d) масса и вес останутся прежними; e) никакой ответ не верен.

37. С искусственного спутника Земли сбрасывают бомбу. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, в какой точке бомба падает на Землю: a) под спутником в момент сбрасывания; b) под спутником в момент падения; c) впереди спутника, поскольку она набирает скорость при падении; d) позади спутника, поскольку она движется по криволинейной траектории; e) она никогда не упадет на Землю.

38. Астронавт в космическом корабле, вращающемся по орбите, находится в состоянии невесомости, потому что: a) находится вне пределов действия силы тяготения; b) его оттягивает наружу центробежная сила инерции; c) он не ускоряется; d) он пребывает в свободном падении по направлению к Земле;

e) ничего из перечисленного выше не верно.

39. Период обращения спутника вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен r, пропорционален: a) r^2; b) $r^{3/2}$; c) r; d) $r^{1/2}$; e) $r^{-1/2}$.

40. Кинетическая энергия вышеупомянутого спутника, деленная на его потенциальную энергию, равна: a) 1; b) 1/2; c) $-1/2$; d) -1; e) никакой ответ не верен.

Часть 2

(по 5 баллов за каждую задачу, всего — 20 баллов)

1. На рисунке 11 приведен график зависимости высоты ракеты y от времени. Ракетные двигатели включаются в момент $t=0$ и выключаются в момент $t=t_0$. Начертите графики зависимости скорости и ускорения ракеты от времени.

2. Два тела, массы которых M_1 и M_2, соединены легкой нитью, перекинутой через блок, вращающийся без трения (рис. 12). a) Нарисуйте силы, действующие на первое тело. b) Нарисуйте силы, действующие на второе тело. c) Напишите уравнения, которые связывают действующие на тела силы с их ускорениями. d) Решив эти уравнения, найдите общее ускорение тел.

3. На тело массой 5 кг, движущееся в положительном направлении оси X, начинает действовать сила, которая направлена в ту же сторону, а ее величина изменяется так, как показано на рисунке 13. a) Какую работу совершит эта сила, чтобы продвинуть тело из точки с координатой $x=0$ до точки с координатой $x=8$ м? b) Если в точке с координатой $x=0$ скорость тела была равна 4 м/с, то какой будет скорость в точке с координатой $x=8$ м?

4. Тело массой M, привязанное к концу невесомой нити, движется по окружности радиусом R по гладкому горизонтальному столу. Оно имеет момент импульса L_0 и кинетическую энергию K_0. Предположим, что мы будем медленно вытягивать нить через маленькое отверстие в центре стола до тех пор, пока радиус окружности не уменьшится до $R/2$. a) Если при $r=R/2$ момент импульса тела равен L, то чему равно отношение L/L_0? Объясните свой ответ. b) Если при $r=R/2$ кинетическая энергия тела равна K, то чему равно отношение K/K_0? Объясните свой ответ.

II ТУР

Часть 1

(всего — 50 баллов)

1. Два точечных заряда $+q$ и $+2q$ находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 14). Аккуратно отметьте на рисунке: a) несколько силовых линий электрического поля, необходимых для описания этого поля (10 б.); b) распределение зарядов на нейтральном алюминиевом стержне, удаленном от зарядов на расстояние $r \gg d$ (10 б.).

2. Конденсатор состоит из трех концентрических тонких сферических оболочек, радиусы которых равны $r_1=a$, $r_2=b$ и $r_3=c$ (рис. 15). Внутренняя оболочка несет положительный заряд $+Q$, а внешняя — равный по величине, но противоположный по знаку заряд $-Q$. Средняя оболочка не заряжена. a) Найдите напряженность электрического поля на расстоянии r от центра сфер для следующих случаев: $0<r<a$ (3 б.), $a<r<b$ (3 б.), $b<r<c$ (3 б.), $r>c$ (3 б.). b) Определите разность потенциалов между оболочками с радиусами a и c (8 б.). c) Получите выражение для емкости системы вложенных сфер (5 б.). d) Какой будет эта емкость, если пространство внутренней сферы заполнить жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε (5 б.)?

Часть 2

(всего — 50 баллов)

1. a) Покажите направление магнитного поля проводника с током I, выходящим по направлению к вам (рис. 16, *a*) (5 б.). b) Определите направление силы, действующей на проводник с током (рис. 16, *b*) (5 б.). c) Обведите кружком точку A или D (рис. 16, *c*), которая имеет более высокий потенциал электрического поля (5 б.). d) Укажите направление вращения

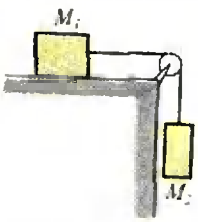


Рис. 12.

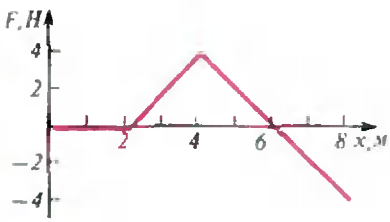


Рис. 13.

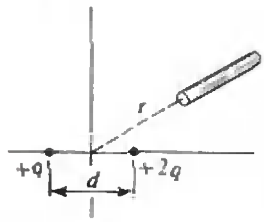


Рис. 14.

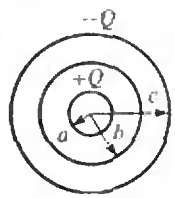


Рис. 15.

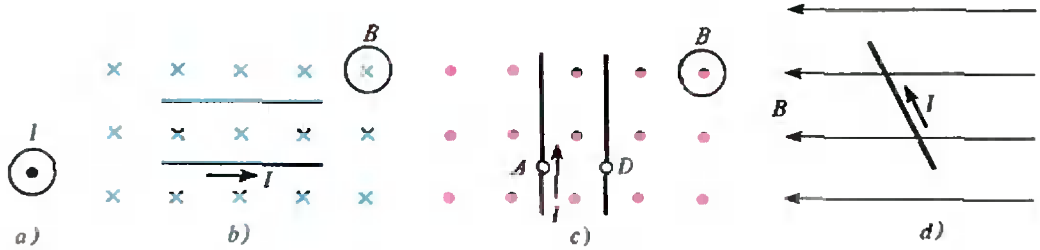


Рис. 16.

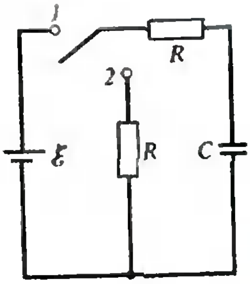


Рис. 17.

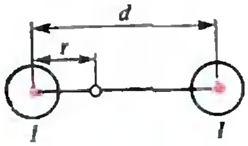


Рис. 18.

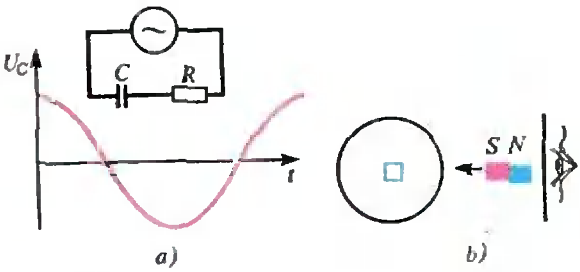


Рис. 19.

витка (на рис. 16, d изображен вид сверху) в магнитном поле, если по нему течет ток I (5 б.).

2. Резисторы сопротивлением $R=1000$ Ом, конденсатор емкостью $C=1$ мкФ и батарея с ЭДС $\mathscr{E}=1000$ В соединены так, как показано на рисунке 17. Сначала ключ долгое время находился в положении *1*, затем — долгое время в положении *2*. Найдите: a) заряд на конденсаторе (5 б.); b) ток в цепи (5 б.); c) общую энергию, выделившуюся в обоих резисторах за то время, пока переключатель находился в положении *2* (5 б.).

3. На рисунке 18 изображены два параллельных бесконечно длинных проводника, по которым течет одинаковый ток I (направленный на вас). Определите величину индукции магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии r от левого проводника (15 б.).

Часть 3
(всего — 50 баллов)

1. a) На рисунке 19, *a* приведен график зависимости напряжения на конденсаторе C от времени. Начертите график зависимости напряжения на резисторе R (10 б.). b) Определите направление тока, индуцированного в витке движущимся магнитом (рис. 19, *b*) (10 б.).

2. a) В цепи, изображенной на рисунке 20, *a*, в некоторый момент ключ замыкают. Найдите скорость нарастания тока в цепи в этот момент времени (10 б.). b) В некоторый момент ток в цепи (рис. 20, *b*) равен 1 А, а заряд на конденсаторе равен 10^{-3} Кл. Найдите максимальную энергию, накопленную в катушке (10 б.) c) Конденсатор ($C=1$ мкФ), катушка и резистор ($R=400$ Ом) соединены с генератором переменного тока ($\mathscr{E}=250$ В, $\omega=2000$ с$^{-1}$) так, как показано на рисунке 20, *c*. При каком значении индуктивности катушки действующее значение тока в цепи будет максимальным (10 б.)?

Часть 4
(всего — 50 баллов)

1. Определите направление движения диамагнитного образца в момент включения тока в электромагните (рис. 21, *a*) (10 б.). b) Определите направление индуцированного магнитного поля при увеличении напряженности E электрического поля (рис. 21, *b*) (10 б.).

2. Конденсатор (рис. 22) состоит из двух параллельных пластин площадью S каждая, находящихся на расстоянии d друг от друга. При протекании по проводам тока i на пластинах возникает заряд q и напряжение между пластинами становится равным U. a) Используя теорему Остроградского — Гаусса, получите выражение для величины напряженности электрического поля в конденсаторе (15 б.). b) Исходя из выражения $i_{см}=\varepsilon_0\, d\Phi/dt$ для тока смещения, выведите зависимость между током смещения $i_{см}$ и током проводимости i (15 б.).

III ТУР

Часть 1

(по 10 баллов за решение каждой из выбранных вами четырех задач, всего — 40 баллов)

1. Параллельный пучок света, входящий в глаз человека, аккомодированного на бесконечность, создает на сетчатке действительное перевернутое изображение предмета. Фокусное расстояние глаза при этом равно 2,5 см. Для того чтобы можно было читать книгу, держа ее на расстоянии 30 см от глаза, фокусное расстояние глаза должно измениться так, чтобы изображение книги на сетчатке было четким. а) Найдите это фокусное расстояние. b) Увеличится или уменьшится при этом радиус кривизны глазной линзы? с) Человеку нужны очки только для чтения. Близорукий он или дальнозоркий? d) Какие линзы нужны для коррекции зрения человеку в случае с)? Нарисуйте соответствующий ход лучей.

2. Солнце движется по круговой орбите вокруг центра нашей галактики. Орбитальная скорость Солнца 220 км/с и радиус орбиты $R=2{,}7\cdot10^{20}$ м. а) Полагая, что масса галактики распределена сферически симметрично, оцените массу, заключенную внутри солнечной орбиты. Ответ выразите в солнечных массах ($2\cdot10^{30}$ кг). b) Если бы Солнце находилось вдвое дальше от центра галактики и вращалось с прежней скоростью, то какая масса была бы заключена внутри его орбиты с радиусом $2R$?

3. В результате ядерной реакции, происходящей на Солнце, 4 протона превращаются в ядро атома гелия ^{4}He. При этом выделяется некоторая энергия. Энергии покоя протона и ядра атома гелия равны соответственно 938 МэВ и 3727 МэВ. а) Какая энергия выделяется в результате реакции? b) Солнечный световой поток составляет $4\cdot10^{26}$ Вт. Сколько протонов в секунду при этом превращаются в ядра атомов гелия?

4. Электрическое поле, связанное с плоской электромагнитной волной, задается уравнениями: $E_x=0$, $E_y=0$, $E_z=2\cos\left(\frac{\pi}{3}10^7(x-ct)\right)$ (все величины заданы в единицах СИ). а) Найдите частоту колебаний. b) Найдите длину волны. с) Запишите уравнения для индукции магнитного поля (B_x, B_y и B_z). d) Определите средний поток энергии, проходящей перпендикулярно площадке размером 1 м^2.

5. Электроны, обладающие импульсом P, проходят через отверстие диаметром d и попадают на экран, находящийся на расстоянии l от отверстия. а) Какова длина волны электронов? b) Нарисуйте картинку распределения плотности электронов на экране как функцию расстояния от центра в плоскости экрана. с) Получите соотношение неопределенностей для расположения электрона внутри отвер-

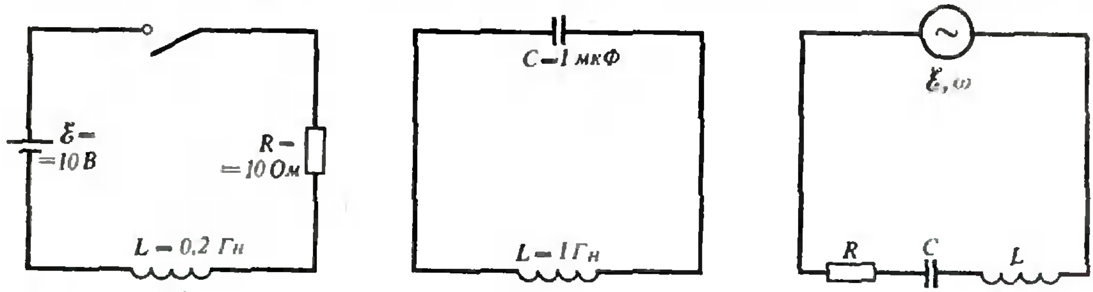


Рис. 20. а) b) c)

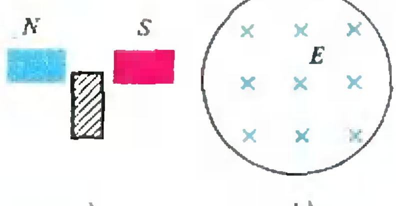


Рис. 21. а) b)

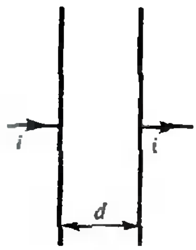


Рис. 22.

Рис. 23.

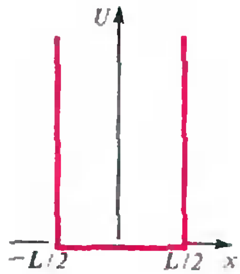


Рис. 24.

стия и его импульса в направлении, параллельном экрану.

Часть 2

(по 4 балла за каждый правильно выбранный ответ, всего — 60 баллов)

1. Струна длиной L, закрепленная на концах, не может колебаться с длиной волны: a) L; b) $2L$; c) $L/2$; d) $2/3\ L$; e) $4L$.

2. Волна в струне распространяется со скоростью 4,4 м/с; длина волны 2 м. Волна пересекает границу и распространяется в другой струне; частота и длина волны остаются прежними. При этом скорость волны во второй струне равна: a) 1,46 м/с; b) 2,2 м/с; c) 2,9 м/с; d) 4,4 м/с; e) 6,6 м/с.

3. Органная труба x, открытая с двух сторон, в 2 раза длиннее органной трубы y, которая с одного конца закрыта. Отношение основных частот колебаний воздуха в трубах x и y равно: a) 1:1; b) 1:2; c) 2:1; d) 1:4; e) 4:1.

4. Определите, какое сочетание l и m_l не разрешено для атома водорода в состоянии с $n=2$: a) 0, 0; b) 1, 0; c) 1, —1; d) 1, +1; e) 2, 2.

5. В кремниевой решетке надо заменить один атом кремния атомом другого элемента так, чтобы получить примесный полупроводник n-типа. Число валентных электронов примеси должно быть равно: a) 0; b) 1; c) 3; d) 4; e) 5.

6. Радиоактивный изотоп углерода ^{14}C имеет период полураспада 5730 лет. Углеродный анализ ископаемой птицы указывает, что 75 % исходного углерода в ее костях уже уничтожено. С момента смерти птицы прошло: a) 1433; b) 2865; c) 5730; d) 11,460; e) 22,920 лет.

7. Максимум теплового излучения при температуре 3К приходится на длину волны, равную: a) 1 м; b) 1 см; c) 1 мм; d) 1 мкм; e) 1 нм.

8. Если удвоить ширину одиночной щели, то интенсивность и размер центрального максимума изменятся так: a) интенсивность удвоится, ширина максимума не изменится; b) интенсивность удвоится, ширина максимума уменьшится вдвое; c) интенсивность увеличится в 4 раза, ширина уменьшится в 2 раза; d) интенсивность увеличится в 4 раза, ширина увеличится в 2 раза; e) интенсивность не изменится, ширина уменьшится в 2 раза.

9. Пустой прозрачный контейнер в форме тонкой линзы (рис. 23) может быть заполнен воздухом ($n=1$), водой ($n=1,3$) или дисульфидом углерода ($n=1,6$). Если пренебречь толщиной стенок контейнера, то он может отклонять параллельный пучок света при условии, что: a) он заполнен воздухом и погружен в воздух; b) он заполнен воздухом и погружен в воду; c) он заполнен водой и погружен в дисульфид углерода; d) он заполнен дисульфидом углерода и погружен в воду; e) он заполнен дисульфидом углерода и погружен в дисульфид углерода.

10. Космический мезон имеет период полураспада 2 мкс в состоянии покоя. Если он приближается к Земле со скоростью, равной 0,8 скорости света, его период полураспада, как было измерено наблюдателем с Земли, равен: a) 0,2 мкс; b) 0,87 мкс; c) 2 мкс; d) 4,6 мкс; e) 20 мкс.

11. При релятивистском движении полная энергия частицы равна удвоенной энергии покоя. Импульс такой частицы равен: a) mc; b) $1/2\ mc$; c) $\sqrt{2}\,mc$; d) $1/\sqrt{3}\,mc$; e) $\sqrt{3}\,mc$.

12. Величины импульсов в основном состоянии и в первом возбужденном состоянии частицы, движущейся в потенциальной яме (рис. 24), равны: a) h/L и $2h/L$; b) $h/2L$ и $2h/3L$; c) $h/2L$ и h/L; d) $2h/L$ и $4h/L$; e) $2h/L$ и $3h/L$.

13. Частица массой m движется в потенциальной яме длиной L, как в предыдущей задаче. Вероятность нахождения частицы в интервале от $x=0$ до $x=L/2$ в первом возбужденном состоянии, по сравнению с вероятностью ее нахождения в том же интервале в основном состоянии: a) меньше; b) такая же; c) больше.

14. Первичными кварками, образующими протон, являются: a) udd; b) uds; c) uus; d) uud; e) usu.

15. Электромагнитное поле можно рассматривать как результат симметрии уравнений физики при следующих преобразованиях волновой функции: a) перемещение; b) вращение; c) отражение; d) фаза; e) вертикаль.

Публикацию подготовили
М. Денисова, В. Тихомирова

Ответы, указания, решения

[redacted]ема Птолемея и некоторые тригонометри[redacted]е соотношения

1. а) -1; б) $\sqrt{3}/8$; в) 3.

2. а) $\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{3}k$, $\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{11}k$, $k\in Z$;

в) $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, $k\in Z$.

[redacted]нение механической энергии

1. $l=h/\mu-b$.
2. $F_{\min}=\mu g(m_1+m_2/2)$.
3. $l=Mv^2/(2\mu(m+M)g)$.
4. $Q\approx 1/2m(v-v_0)^2=81$ Дж.
5. $Q=\rho gV(h_1+h_2)-\rho_ж gVh_2$.

[redacted]нградский государственный университет
[redacted]ематика

Вариант 1

1. $[-2;\ -1/2)\cup(1;\ 7]$.

2. $\frac{1}{2}\left(\pi(2k+1)\pm\sqrt{\pi^2(2k+1)^2-12}\right)$, $k\in Z$, $k\neq 0,\ -1$; $\frac{1}{2}\left(\pi(2k+1)\pm\sqrt{\pi^2(2k+1)^2+12}\right)$, $k\in Z$.

3. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$.

4. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}-\sqrt{S})^2$.

Решение. Пусть $S_1=S_{PBL}$, $S_2=S_{QCK}$ (рис. 1). Тогда $\frac{\sqrt{S_{OKL}}}{\sqrt{S}}=\frac{KL}{BC}=\frac{BL+KC-BC}{BC}=$ $=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}-1$, откуда и получаем ответ.

5. $2\sqrt{2}\pi\frac{\cos^2\alpha\sin(\alpha/2)}{(1+\sqrt{2}\sin(\alpha/2))^3}V$.

Вариант 2

1. $-\frac{5}{2}\pm\sqrt{7}$, $-\frac{5}{2}\pm\sqrt{7}$, $-\frac{5}{2}\pm\sqrt{7}$; $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{8}$, $-\frac{3}{4}$.

2. $\left(-\frac{9}{2};\ -\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$.

3. πk, $\pi/12+\pi k/3$, $k\in Z$.

4. $\left(\ln\left(2\cos\frac{\pi}{18}\right)+1;\ +\infty\right)$.

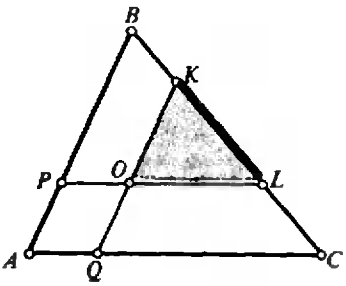


Рис. 1.

Решение. Положив $e^{x-1}=2y$, запишем неравенство в виде $f(y)>0$, где $f(y)=4y^3-3y-\sqrt{3}/2$. Решаем уравнение $f(y)=0$ заменой $y=\cos\varphi$, получим $\cos 3\varphi-\cos\frac{\pi}{6}=0$, откуда $3\varphi=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, что при $k=0,\ 1,\ 2$ дает нам три различных значения для $y=\cos\varphi$: $\cos\frac{\pi}{18}$, $\cos\frac{13\pi}{18}$, $\cos\frac{25\pi}{18}$, т. е. все корни кубического уравнения. Поскольку $y=\frac{1}{2}e^{x-1}$ всегда положительно, заключаем, что выражение $e^{3(x-1)}-3e^{x-1}-\sqrt{3}$ меняет знак лишь при $e^{x-1}=2\cos\frac{\pi}{18}$. Из неравенства $e^{x-1}>$ $>2\cos\frac{\pi}{18}$ получаем ответ.

5. $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}/a$.

[redacted]нградский государственный технический [redacted]рситет

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{123}{845}$. 2. $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

3. $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. 4. -6. 5. 0,125 и 0,25. **Указание.** Чтобы не упустить второй случай, полезно нарисовать окружности разным цветом.

Вариант 2

1. $\frac{b(a+b)}{ab+b+1}$.

2. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, $k\neq 0$. **Указание.** Решите сначала неравенство.

3. $(-\infty;\ 1]\cup[1{,}5;\ +\infty)$. 4. 87450. 5. $12\sqrt{3}$.

Указание. Возможны 2 случая: M — внутри угла и M — вне угла. В каждом из этих случаев обозначьте через x и y длины отрезков, отсекаемых на сторонах угла прямой, проходящей через точку M, и составьте систему двух уравнений с неизвестными x и y.

Вариант 3

1. $a<-3$, $a\neq-9$. 2. 2; 2^{-10}. 3. $y=-7x-$ $-11\pi/3$. 4. $1\leqslant a\leqslant 5$. 5. $14/\sqrt{3}$. **Указание.** Возможны три случая расположения точки M: внутри треугольника; вне треугольника, но внутри какого-то угла треугольника; внутри одного из трех углов, вертикальных по отношению к внутренним углам треугольника. Из этих случаев выберите нужный.

Вариант 4

1. $-\frac{5\pi}{4}$. 2. $(4;\ 5)\cup(5;\ 6)\cup(6;\ +\infty)$.

3. $a\leqslant 1$, $a=5$; $x=2$.

4. $(2;\ 1)$, $(2/3;\ 4/3)$. **Указание.** Вычесть из второго уравнения первое, домноженное на 3/2.

5. $\sqrt{2}/3$, $\sqrt{3}/2$. **Указание.** Введите в качестве неизвестной x расстояние от точки D до точки касания окружностей между собой.

Физика

1. $t=(t_2^2+2t_1t_2-t_1^2)/(2(t_1-t_2))$.
2. $F_н=4\pi^2n^2ml=555$ Н.
3. $\alpha=\mathrm{arctg}\,(1/3)$.
4. $h=l(1-\rho_0/\rho)=1{,}74$ см (здесь ρ_0 — плотность воды).
5. $T=2\pi\sqrt{m/(2\rho gS)}=1{,}54$ с.
6. $Q=5/2\,(p_2-p_1)V_1$.
7. $Q=2\pi\sigma^2/(\rho g)$ (где ρ — плотность воды).
8. $F_р=Qq/(8\pi^2\varepsilon_0R^2)$.
9. $I_{к.з.}=IU(R_2-R_1)/((U-IR_1)R_2)=29{,}6$ А.
10. $x=LF/(L-F(1-d/D))=15{,}8$ см или $x'=LF/(L-F(1+d/D))=20$ см.

[redacted]инградский государственный [redacted]гогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Вариант 1

1. Между числами 6 и 7.
2. Данное уравнение корней *не имеет*.
3. Первое число больше.
4. $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$.
5. $(7;\ 49)$. 6. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.
7. 2/5 ч. 8. 25π. 9. $\arccos \mathrm{tg}\,(\alpha/2)$.
10. $9\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. Между числами 2 и 3.
2. 1, 2, $(-1\pm\sqrt{17})/2$.
3. $\mathrm{tg}\,2\cdot\mathrm{tg}\,3\cdot\mathrm{tg}\,4>0$.
4. $y=\sin x$ при $2\pi k<x<(2k+1)\pi$.
5. $(\log_2(4/5);\ \log_2(5/4))$.
6. $1/9;\ 1/\sqrt{3}$.
7. 5m. 8. 80/5. Указание. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, образованного основанием, боковой стороной и диагональю трапеции, по формуле $R=abc/4S$.
9. 180°. 10. 45.

[redacted]инградский электротехнический институт [redacted] В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $-2;\ 2$. б) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 3)$.
в) 3 корня, если $|a|<1/\sqrt{6}$; 1 корень, если $|a|\geqslant 1/\sqrt{6}$.
2. б) $\pi/6$. в) $\pi/3$. Указание. Сделайте замену $t=\sin^2\alpha$ и исследуйте функцию $f(t)=4(t^3-t^4)$ на отрезке $[0;\ 1]$.
3. а) $\log_2 3$. б) 486. в) $[2;\ +\infty)$.
г) $[-4;\ +\infty)$. Указание. В пунктах а), в), г) сделайте замену $z=2^x$.

Вариант 2

1. а) $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$.
б) $-2;\ 2$. в) $(-\sqrt{2};\ -1]\cup[1;\ \sqrt{2})$. г) 3 корня ($0$ и $\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$).
2. а) $\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}$. б) $\sqrt{2}/4;\ 3\sqrt{2}/4$. в) $\sqrt{2}/2$. Указание. Найдите наименьшее значение величины $L^2(a)$.
3. а) 64. б) $\log_3 2$. Указание. Сделайте замену $z=3^x$. Тогда $f(x)=27(z+1)^3$. в) 1 корень. Указание. Докажите, что функция $h(z)=27(z+1)^3-\dfrac{1}{z}$ возрастает при $z>0$ и может принимать значения разных знаков. Следовательно, уравнение $27(z+1)^3=\dfrac{1}{z}$ имеет 1 корень.

Физика

Вариант 1

1. а) $a_{\tau\,\max}=\mu(g-v^2/R)=2{,}8$ м/с². б) Полное ускорение составляет с горизонтом угол $\alpha=\mathrm{arcctg}\,\mu/(gR/v^2-1)=60°$.
2. а) В сосуде будет смесь льда массой $m_л=0{,}3$ кг и воды массой $m_в=0{,}4$ кг при температуре $t=0$ °С. б) Во втором случае время установления термодинамического равновесия будет меньше.
3. а) $P_1=1{,}25$ Вт, $P_2=0{,}83$ Вт, $P_3=3$ Вт. б) Напряжение возрастет.
4. а) $A=BIla\sin\alpha=0{,}3$ Дж. б) Работа будет равна нулю.
5. а) См. рис. 2. б) При движении точки от двойного фокусного расстояния к фокусу ее действительное изображение удаляется от двойного фокусного расстояния (за линзой) к «плюс» бесконечности, а при движении точки от фокуса до линзы ее мнимое изображение приближается из «минус» бесконечности к линзе.

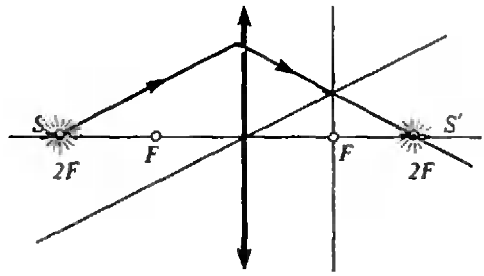


Рис. 2.

Вариант 2

1. а) $E_{k1}=E_k(m_1+m_2)/m_1=7{,}5$ Дж. б) На увеличение внутренней энергии системы.
2. а) $t_{уст}=(Q/m-(c_л(t_0-t)+\lambda))/c_в=30$ °С.
б) Могут при температуре $t_0=0$ °С.
3. а) $I_{к.з.}=IU(R_V-R_A)/((U-IR_A)R_V)=26$ А.
б) $R\ll r=30/63$ Ом.
4. а) Электрон должен лететь со скоростью $v=E/B=5\cdot10^5$ м/с перпендикулярно и электрическому и магнитному полям. б) Может, если $\vec v\parallel\vec E$ или $\vec v\parallel\vec B$.
5. а) $d_в=d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}/(n\cos\alpha)=15{,}2$ см. б) Будет.

[redacted]ант» для младших школьников [redacted] («Квант» № 3)

1. Заметим, что площади луночки и криволинейного треугольника (рис. 3) равны. Действительно, площадь маленького круга в 4 раза меньше площади большого, отсюда площадь четырех маленьких кругов равна площади

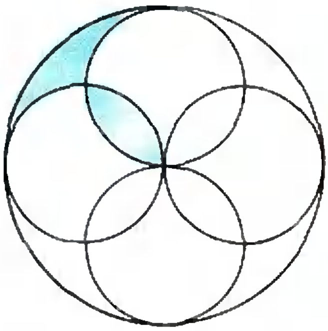


Рис. 3.

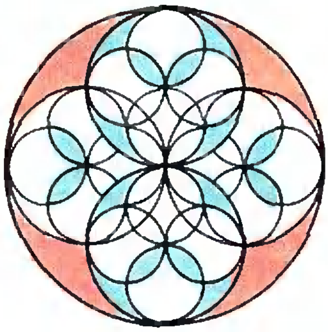


Рис. 4.

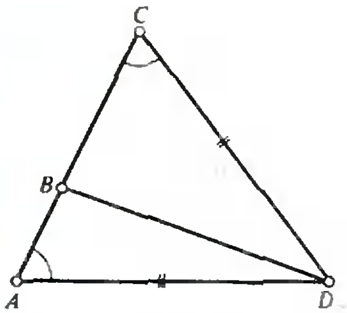


Рис. 5.

большого круга; при этом четыре луночки покрываются дважды, а четыре треугольника не покрываются ни разу. Отсюда вытекает равенство площадей луночки и треугольника. Красный треугольник подобен синему, площадь красного треугольника в 4 раза больше площади синего треугольника, но, так как синих фигур на рисунке 4 в 4 раза больше, чем красных, их площади равны.

2. Из первого условия следует, что Арамис занял 4 место, из второго — что Портос занял 2 место, а из последнего условия следует, что д'Артаньян был первым, а Атос — третьим.

3. Заметим, что, с одной стороны, Д$\leq$3, а с другой стороны, Д — четно, отсюда Д=2. Тогда Р равно 8 или 3, но Р не может равняться 8. При Р=3 получаем И=8, Б=6 и Ö=7.

4. Коля, Саша и Антон купили 5 тетрадей, 10 карандашей и 5 резинок, что в 5 раз больше того, что купил Саша. Следовательно, за все было заплачено $12\cdot 5=60$ копеек. Саша с Колей заплатили 39 копеек, а Антон заплатил $60-39=21$ копейку.

5. Разрежем четырехугольник по диагонали BD и, перевернув треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD (рис. 5). Получился равнобедренный треугольник ACD ($AD=DC$), поэтому $\angle A=\angle C$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Во втором случае меньше — даже при наличии трения.

2. 150 Дж. Работа силы не зависит от массы того тела, на которое действует данная сила.

3. Двигаясь, пассажир совершит некоторую работу по своему подъему и раньше достигнет верха эскалатора. Следовательно, двигатели эскалатора произведут меньшую работу при подъеме движущегося пассажира, чем при подъеме неподвижно стоящего.

4. Величины работы пропорциональны пройденным путям, поэтому работы за равные промежутки времени различны.

5. Потянув цепочку за среднее звено, ее можно привести в такое же положение, которое занимают стержни. При этом будет совершена работа, за счет которой центр тяжести цепочки поднимется. Значит, он лежит ниже, чем центр тяжести стержней.

6. Максимальной скорость планеты будет при наибольшем сближении с Солнцем (перигелий), минимальной — при наибольшем удалении (афелий).

7. Однородное.

8. Да. У первого маятника период колебаний зависит от напряженности электрического поля и массы, у второго период такой же, как и в отсутствие зарядов.

9. Да, несмотря на то, что на различных участках поверхности шара B будут находиться разноименные заряды.

10. Это утверждение было бы верным лишь для неограниченной в пространстве заряженной плоскости.

11. При удалении стекла приходится совершать работу против сил кулоновского притяжения разноименных зарядов. Эта работа идет на увеличение энергии конденсатора.

12. Направление силы Лоренца перпендикулярно скорости движения заряда.

13. В первом случае работа больше.

14. При питании электромагнита постоянным током энергия расходуется на нагрев проводника.

Микроопыт

Если магнитное поле достаточно велико, чтобы втащить шарик на наклонную плоскость, то оно будет и достаточно сильным, чтобы не дать шарику скатиться вниз по желобу.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 1)

13. Пусть в корзине было n яблок, тогда первый внук получил $1+\frac{n-1}{10}=\frac{n+9}{10}$ яблок. Остается $n-\frac{n+9}{10}=\frac{9n-9}{10}$ яблок. Второй внук в таком случае получит $2+\frac{1}{10}\left(\frac{9n-9}{10}-2\right)=\frac{171-9n}{200}$ яблок. Так как все внуки получили одинаковое число яблок, то $\frac{n+9}{10}=\frac{171+9n}{100}$, откуда $n=$

$=81$. Первый внук получит $\frac{81+9}{10}=9$ яблок, по сколько же остальные, поэтому у бабушки было $81:9=9$ внуков.

14. Чтобы получить «счастливый» номер с возрастающими цифрами, достаточно выбрать любые пять цифр из девяти (от 1 до 9) и расположить их в порядке возрастания. Будем выбирать цифры по очереди. Тогда первую можно выбрать 9-ю способами, вторую — 8-ю оставшимися, третью, четвертую и пятую — 7-ю, 6-ю и 5-ю способами соответственно, а всего получается $9\cdot8\cdot7\cdot5$ способов выбора пяти цифр. Однако после упорядочения по возрастанию разные наборы цифр дадут одинаковые «счастливые» номера. Число наборов, дающих один и тот же «счастливый» номер, равно числу всех перестановок 5-ти цифр и подсчитывается, как и выше: на первом месте в перестановке может оказаться любая из 5-ти цифр, на втором — любая из остальных 4-х и т. д.; всего получается $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ перестановок и, значит, $(9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5):(5\cdot4\times\times3\cdot2\cdot1)=126$ «счастливых» номеров (с возрастающими цифрами). Аналогично подсчитываются «счастливые» номера с убывающими цифрами, только теперь нужно выбирать 5 цифр из 10-ти (от 0 до 9) и располагать их по убыванию. Получим $(10\cdot9\times\times8\cdot7\cdot6)/(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)=2\cdot126=252$ номера. Общий ответ: $126+252=378$.

15. Сначала проверим, что при $n=1$ условие выполняется: $x_1-1\cdot x_1=0$, если $x_1=0$. При $n=2$ $x_1+x_2=0$ и должно выполняться условие $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=0=(x_1-x_2)^2$, но для $x_1=1$, $x_2=-1$ первое условие выполняется, а второе — нет. При $n=3$ $x_1=-(x_2+x_3)$ и

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=$$
$$=-(x_2+x_3)^3+x_2^3+x_3^3+3(x_2+x_3)x_2x_3=0.$$

Итак, при $n=1$ и $n=3$ условие задачи выполняется, а при $n=2$ — нет. Покажем, что для остальных n условие не выполняется. Так как n больше 3, то положим $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, а остальные равными 0. Первое условие для них выполняется, а второе запишется так: для четных n $2^n+1^n+1^n=2^n+2>0$, а для нечетных n в виде $2^n-1^n-1^n=2^n-2>0$ при $n>3$. Таким образом, получаем ответ: $n=1$ и $n=3$.

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.01.91. Подписано к печати 11.03.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт 27,09 Уч.-изд. л. 8,22.
Тираж 94 084 экз. Заказ 137 Цена 70 коп

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

«МЕФИСТО» В УДАРЕ

В прошлый раз мы рассказывали о компьютерной олимпиаде, в которой участвовали многократные чемпионы мира среди микрокомпьютеров «Фиделити» и «Мефисто». Одна из интереснейших партий на олимпиаде была сыграна между этими машинами.

«Фиделити» — «Мефисто»
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. Кd2 de 4. К:e4 Сf5 5. Кg3 Сg6 6. h4 h6 7. h5 Сh7 8. Кf3 Кd7 9. Сd3 С:d3 10. Ф:d3 Фc7 11. Сd2 e6 12. Фe2 Кgf6 13. 0—0—0 c5 14. c4 0—0—0 15. Кe5 Кb6. Продолжение 15...К:e5 16. de Кd7 17. f4 дает белым преимущество в пространстве, и черные предпочитают сохранить напряжение в центре. **16. Сf4 Сd6** (парируя угрозу Кg6) **17. Крb1 Кbd7.** Конь возвращается на это поле, чтобы оказать давление на аванпост белых e5. **18. К:d7 Л:d7 19. С:d6 Л:d6 20. dc Ф:c5 21. Л:d6 Ф:d6 22. Лd1 Фc6 23. f4 Лd8 24. Л:d8+ Кр:d8 25. b3 Фc5.**

Позиция выглядит ничейной, но, как это часто бывает в защите Каро-Канн, массовые упрощения пошли на пользу черным. Их король в большей безопасности, а пешки белых разрознены. В чем же тогда состояла ошибка белых? Возможно, ходы 14. c4 и 15. Кe5 не очень согласуются друг с другом.

26. Фf3 Крc8 27. Крb2 Крb8 28. Крb1 Фg1+ 29. Крc2? Точнее 29. Крb2, не пуская черного ферзя на a1. **29...Фa1 30. a4 Фa2+ 31. Крc3 Фb1 32. Фe3 b6 33. Фe5+ Крb7 34. Фe3 Крa6 35. Крb4 Фc2.**

На 36. Фf3, защищая пешку g2, следует 36...Кd5+!! 37. cd Фc5× или 37. Крa3 Фc1+ 38. Крa2 Кb4×. Чтобы не попасть в эту мефистофелевскую ловушку, белые вынуждены расстаться с пешкой.

36. Фe2. На сей раз 36...Кd5+ не проходит из-за вскрытого шаха 37. cd+. **36...Ф:e2 37. К:e2 К:h5 38. Крc3 Крa5?** Нелепый ход, непростительный даже для компьютера. Направляя короля в центр — Крb7, черные легко выигрывали это окончание. **39. Кd4!** Блестящий шанс белых: таким способом они используют оказавшееся вдруг опасным положение черного короля и активизируют коня.

39...К:f4 40. Кc6+ Крa6 41. Кd8 f5 42. b4 b5. Наступила катастрофа. Из-за немыслимого 38-го хода черных белые угрожали 43. b5+ Крa5 44. Крb3 с неизбежным матом. Сейчас ничью делало 42...Кe2+, но, чтобы играть на выигрыш, надо поступиться одной пешкой. **43. cb+ Крb6 44. Крc4 Крc7 45. Кc6 К:g2.** После 45...Крb6 46. a5+ или 45...Крb7 46. Кd8+ даже машинам трудно подсчитать результат гонки проходных пешек на противоположных флангах. **46. К:a7 f4 47. Кc6 Крd6** (не допуская Крc5 и b6+) **48. Крd3 Кe3.** Конь бежит назад, чтобы сдержать пешки белых на ферзевом фланге.

49. a5 Кd5 50. a6 g5. Заслуживало внимания 50...h5 — эта пешка дальше от короля белых. **51. a7 Кb6 52. Кa5 Крc7** (грозило 53. Кc4+) **53. Кc4 Кa8 54. b6+ Крb7 55. Крe4 h5.** Король и конь черных заняли самые неудобные поля, и белые могут беспрепятственно уничтожить казавшуюся ранее столь сильной армию черных пешек королевского фланга. **56. Кd6+ Кр:b6 57. Кf7 g4 58. Кр:f4 Кр:a7 59. Кg5 Кc7 60. Кe4 Кd5+ 61. Крg5 e5.** Если теперь 62. Кр:h5, то 62...Кf6+!! 63. К:f6 g3, и черная пешка проходит в ферзи.

62. Крh4 Кf4 63. Кd2 Крa6 64. Кc4 e4 65. b5+ Крa7 66. Кe3 Крb6 67. Крg5. Маневр белого коня вызвал перемещение черной пешки с e5 на e4 и подорвал защиту черного коня. Это спасает белых. **67...Кe2 68. Кр:h5 g3 69. Крg5 Кр:b5 70. Крf5 Кc3 71. Крf4 Крc5 72. Крe5 Крb4 73. Крf4 g2 74. К:g2 Крc4.** Ничья. Грандиозная баталия, хотя и полная ошибок.

Более десяти лет существует в «Кванте» «Шахматная страничка», информирующая читателей обо всех новостях компьютерных шахмат. И все эти годы ее ведущий мечтал сыграть в одном турнире с шахматным роботом. Наконец мечта сбылась на традиционном турнире «Берлинское лето» — 90. Игра шестикратного чемпиона мира среди микрокомпьютеров «Мефисто» вызывала у меня особый интерес. Увы, турнир проходил по швейцарской системе и жребий не свел нас вместе. Несмотря на блестящий старт — 3 очка из трех, машина в дальнейшем не выдержала взятого темпа (плохая физическая подготовка!) и даже отстала от ведущего странички на пол-очка.

Сенсационно закончилась встреча в шестом туре, когда между собой сразились два земляка из Мюнхена: известный гроссмейстер С. Киндерманн и чемпион мира «Мефисто».

«Мефисто» — С. Киндерманн
Староиндийская защита

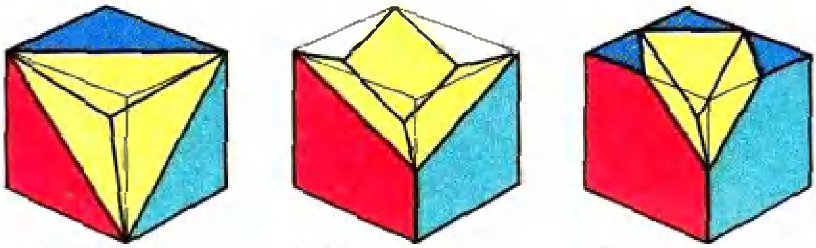
1. d4 Кf6 2. c4 g6 3. Кc3 Сg7 4. e4 d6 5. f3 0—0 6. Сe3 e5 7. Кge2 c6 8. d5 cd 9. cd a6 10. Кg3 Кe8 11. Сe2 f5 12. ef gf 13. f4 Кd7 14. Кh5 Сh8 15. fe К:e5 16. g3 b5 17. Сh6 Лf7 18. 0—0 Фb6+ 19. Крh1 Сb7 20. Фd2 Фd8 21. Лad1 Лc8 22. Крg1 Кc4 23. С:c4 Л:c4 24. Лf3 Сe5 25. Лdf1 Сc8 26. b3 Лd4 27. Фc2 b4 28. Кe2 Л:d5 29. Фc4 Лc5 30. Ф:b4 Лc2 31. Л3f2 Фc7 32. Кd4 Л:f2 33. Л:f2 Фc5 34. Ф:c5 dc 35. Кc2 Кd6 36. Лd2 Сb7 37. Сf4 С:f4 38. К:f4 Кe4 39. Лd8+ Лf8 40. Лd7 Лf7 41. Лd1 Сc8 42. Кe3 Лd7 43. Кfd5 Лf7 44. Лc1 Сb7 45. Кf4 Лd7 46. К:f5 Лd2 47. Кe6 Крf7 48. К:c5 К:c5 49. Л:c5 Крf6 50. Лa5 Лg2+ 51. Крf1 Л:h2 52. Кd6 Сf3 53. Лf5+ Крe6 54. Л:f3 Кр:d6 55. Лf6+ Крe5 56. Л:a6 Крe4 57. a4 Крf3 58. Крe1 Кр:g3 59. b4 h5 60. b5 h4 61. Лg6+ Крf3 62. Лh6 Крe3 63. Крf1 h3 64. Крg1 Лg2+ 65. Крh1 Крf2 66. b6 Лg4 67. a5 Лg2 68. b7. Черные сдались. Во всех трех стадиях игры машина проявила себя вполне достойно.

Е. Гик

Цена 70 коп.
Индекс 70465

Каждая из изображенных здесь фигурок — это объединение двух или трех половинок куба (т. е. частей куба, получаемых при его разрезании плоскостью, проходящей через центр). Верхние три фигуры — это ответы к задачам из прошлого номера, в которых требовалось найти объединение данных половинок. Попробуйте решить задачи обратного типа: определите, объединением каких половинок куба являются фигурки а) — м) (все использованные половинки показаны на обложке прошлого номера).

В. Канев



$4\cup5\cup6$ $7\cup8\cup9$ $10\cup11\cup12$